

博士論文

回転型振子の振り上げ・安定化制御  
に関する研究

平成26年3月

田 中 征 治

岡山県立大学大学院  
情報系工学研究科



# 目次

<b>第1章 序論</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景 . . . . .	1
1.2 本論文の構成 . . . . .	4
<b>第2章 対象モデルと安定化理論</b>	<b>7</b>
2.1 緒言 . . . . .	7
2.2 回転型振子のモデル . . . . .	7
2.3 実機モデル . . . . .	11
2.4 真上平衡点近傍における線形化 . . . . .	13
2.5 最適レギュレータ . . . . .	15
2.6 強安定化制御 . . . . .	17
2.7 リアプノフの安定性理論 . . . . .	18
2.8 ラサールの不変定理 . . . . .	20
2.9 平衡点の分類 . . . . .	21
2.10 結言 . . . . .	22
<b>第3章 振り上げ制御</b>	<b>23</b>
3.1 緒言 . . . . .	23
3.2 エネルギー制御法による振り上げ制御則 . . . . .	23
3.3 特異点の回避条件 . . . . .	26
3.4 エネルギーの収束性と真下平衡点の安定に関する解析 . . . . .	28
3.5 議論 . . . . .	32
3.6 数値シミュレーション . . . . .	34
3.7 結言 . . . . .	38
<b>第4章 実機検証</b>	<b>44</b>
4.1 緒言 . . . . .	44
4.2 振り上げ制御則の設計と解析 . . . . .	44
4.3 実機構成 . . . . .	46
4.4 振り上げ制御 . . . . .	49

4.5	振り上げ・安定化制御 . . . . .	50
4.6	議論 . . . . .	51
4.7	結言 . . . . .	53
<b>第 5 章</b>	<b>強安定化</b>	<b>64</b>
5.1	緒言 . . . . .	64
5.2	強安定化制御器の存在性 . . . . .	64
5.3	強安定化制御器の設計法 . . . . .	70
5.4	数値シミュレーション . . . . .	72
5.5	強安定化制御器のロバスト性について . . . . .	76
5.6	結言 . . . . .	81
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>82</b>
6.1	研究成果 . . . . .	82
6.2	研究課題 . . . . .	83
	<b>参考文献</b>	<b>84</b>
	<b>謝辞</b>	<b>87</b>
	<b>研究業績</b>	<b>88</b>

# 第1章 序論

## 1.1 研究背景

劣駆動システム (underactuated system) は，システムのもつ自由度の数よりもアクチュエータの数が少ないシステムのことを指し，アクチュエータにより直接制御できない非駆動関節を有する．非駆動関節は，直接駆動することができない代わりに，駆動関節の動きや周囲環境との相互作用により，間接的に駆動することができるため，システムのアクチュエータの数を低減し，より少ない駆動装置で装置全体を制御することは，軽量化，省エネルギー化，低コスト化への貢献が考えられる．また，アクチュエータ故障時の代替制御などの貢献も考えられ，宇宙や深海などにおける極限での活動を想定したロボットへの応用に期待されている [1]．このようなシステムの実現は，その他，多くの産業・医療分野にも影響を与える可能性があり，制御技術の研究・開発は，重要な課題であるといえる．

劣駆動システムは，本質的に複雑な非線形の動特性や一般化加速度まで含む積分不可能な2階非ホロノミックな拘束 (速度や加速度に依存する拘束) が一般に存在するため，全駆動システム (fully actuated system) で用いることのできる制御理論を直接用いることができない．こうした難しさが挑戦的な課題として注目され，多くの研究者によって振り上げ制御，安定化制御と呼ばれる姿勢制御に関する研究が行われてきた [2, 3, 4, 5, 6]．

Fig. 1.1, 1.2 は，振子型劣駆動システムの代表例である [7]．台車型振子は台車と非駆動関節で接続された振子から構成され，台車を動かすことによって振子を制御するシステムである．Pendubot と Acrobot は2リンク型のシステムであり，それぞれ駆動関節と非駆動関節の位置が異なる．Acrobot は，体操選手の手を非駆動関節，腰を駆動関節としてモデル化した，鉄棒運動をする体操選手の動きを模擬したシステムとして知られている．Pendubot, Acrobot とともに理論と実機の両面から，それらの姿勢制御に関する研究はよく行われている．回転型振子は，固定された軸を中心に水平面内を回転する駆動アームと，そのアームの先端に非駆動関節を介して取り付けられた振子から構成され，振子は垂直平面内を自由に回転できるようなシステムである．また，線形，および非線形制御理論の分野で，新しい制御手法の有効性を検証するベンチマークとして，研究や教育分野で幅広く

用いられている。

振子型の劣駆動システムでは、振り上げ制御、安定化制御と呼ばれ姿勢制御に関する研究がよく行われており、振り上げ制御では、いくつかのアプローチが提案されている。例えば、文献 [8] の部分線形化法、文献 [9] の近似線形化法、文献 [10] の疑似線形化法のような線形化手法を用いるアプローチがある。しかしながら、これら線形化手法により設計された制御則に対して、閉ループシステムの振る舞いを厳密に解析することが難しいという課題がある。その他のアプローチには、劣駆動システム [2, 3, 7, 11, 12, 13] の受動制御や、エネルギー制御法がある。一例として、Fantoni ら [3]、Kolesnichenko ら [12] は、総力学的エネルギーと駆動変数が目標値をとるように安定化する制御問題に取り組んでいる。

回転型振子の振り上げ・安定化制御では、振子を直立姿勢（真上平衡点）まで振り上げるとともにアームを望ましい位置まで移動させ、振子とアームをその姿勢で安定化させることを目的とする。

回転型振子の振り上げ制御において、Fantoni ら [6] はエネルギー制御法による制御則を提案し、システムの状態を振子の力学系がもつホモクリニック軌道に漸近させる問題として扱ったうえで、その制御則に特異点（制御入力トルクが無限大になる回転型振子の状態）を回避するための制御パラメータに関する十分条件を与えている。また、振子が真下平衡点（振子が下向き位置に静止する点）で留まるのを防いで、ホモクリニック軌道に漸近することを保証するための、状態変数の初期条件と制御パラメータについての制約条件を示している。ただし、これらの条件は過度に保守的である（必要以上に厳しい条件を仮定している）可能性がある。また、Quanser Consulting Inc. [14] では、振子のエネルギーのみに着目したエネルギー制御法による振り上げ制御則を提案し、理論解析と実機検証を扱っている。ただし、実験で用いられている制御則は、振子を素早く振り上げることを目的とし、理論解析で用いた制御則に、チューニングゲインや符号関数を加えるなどの操作を行っているため、理論と実機検証が対応していない課題がある。

回転型振子の安定化制御では、通常、真上平衡点（振子が上向きに静止する点）における線形近似モデルを用いて制御器が設計される。アームと振子の角度と角速度が測定可能な場合には、通常の静的なフィードバック制御器（状態変数をもたない制御器）を用いて、その姿勢を安定化できる [15]。一方、アームと振子の角度のみが測定可能な場合に、安定化制御器は、通常、オブザーバを用いて設計される。ただし、このオブザーバを用いた制御器が安定か不安定化かは自明ではない。

実システムの制御では、制御対象と制御器によって構成される閉ループシステムの安定性に加えて、制御器自体の安定性も重視されることがある。安定な出力フィードバック制御器によって制御対象を安定化することを強安定化 [16, 17] とい

う．一般に，安定な制御器の使用が望まれる理由として，不安定な制御器の使用は，アクチュエータやセンサーの故障時などに制御系の一部の変数の発散を招く可能性があること，プラントの不確かさや非線形性に対する制御系の感度を高くしてしまう場合があること，などが挙げられる．文献 [17] で述べられているように，制御器が安定でない場合，閉ループ伝達関数は常にプラントの閉右半平面に追加の零点と無限遠零点をもつ．無限遠零点は外乱に対する感度と基準入力への追従の能力に影響を及ぼすため，安定化の過程で無限遠零点は導入しないことが望ましい．また，強安定化可能性は，二つのプラントを同一の制御器によって安定化する同時安定化可能性と等価であることも知られている．強安定化問題は，現在でも盛んに研究されているが [18, 19, 20, 21, 22]，回転型振子の強安定化については明らかにされていない．

以上のことから，本論文では，まず，振り上げ制御について，エネルギー制御法と呼ばれる，システムの総エネルギーに着目した制御手法を扱い，理論および実験の両方において，従来の結果から改善を示す．そして，安定化制御について，安定な出力フィードバック制御器による安定化という強安定化の問題を扱い，強安定化器の存在性と設計法を示す．具体的には，次のとおり，振り上げ・安定化制御に関する新たな成果を述べる．

1. 文献 [6] のエネルギー制御法を再検討し，その解法を改善するため，制御則の特異点を回避するための既存の十分条件に対して，必要十分条件を提示する．つぎに，振子の大域定な動きの解析を行い，真下平衡点がサドルであることを関連付けることにより，振子が真下平衡点に留まる事を防ぐための回転型振子の初期条件と制御パラメータに関する文献 [6] の制約を取り除けることを示す．具体的には，ラウス・フルビッツの判別法を用いて真下平衡点におけるヤコビ行列が開左半平面，および右半平面にそれぞれ二つの固有値をもつことを示す．これは振子が最終的に ルベーク測度ゼロの集合を除き，すべての初期状態に対して任意の局所安定化制御器に切り替え可能な範囲まで振り上げられることを示す．このようにして，制御目的を達成するための，より大きな制御パラメータの範囲を与え，また，回転型振子の初期条件について制約をほとんど必要としないことを示す．さらに，数値シミュレーションを通して提示した理論結果の有効性を確認する．数値シミュレーション結果は制御パラメータの改善された条件の下で，振り上げ制御が素早く達成できることを示す．

2. 回転型振子に対してエネルギー制御法による振り上げ制御の理論結果の有効性を検証するために Quanser Consulting Inc. [14] で開発された実験システムを使用し，実機においてもエネルギー制御法による振り上げ制御は，振子を垂直位置まで振り上げることができ，望ましい位置まで素早くアームを駆動することを示す．

す. さらに, 実験システムの開発元 [14] で提案されたエネルギー制御法による振り上げ制御則, およびそのサンプルプログラムについて, 本論文の結果と比較する. 制御則 [14] は, 文献 [2] で提案された制御方式を用い, 振子の回転運動エネルギーのみ制御し, 振り上げ制御の段階でアームは制御していないため, 理論的および実験的に, 本論文で提案した制御則の方が優れていることを示す. 回転型振子に対してエネルギー制御法による理論結果の有効性を示す実験結果の報告は, 本論文が初めてである.

3. 安定化制御に関する研究として, 文献 [23] の Acrobot, Pendubot に対する強安定化制御器の設計法にヒントを得て, 回転型振子に対し, 強安定化の未解決の問題を研究する. 従来の強安定化問題は与えられた伝達関数に対して安定な安定化制御器の存在性と設計を研究することである [24]. しかしながら, 本研究では状態方程式と制御入力のみ明らかであり, 真上平衡点において回転型振子の強安定化を達成するための適切な出力が存在するかどうか調査する必要がある. この目的を達成するため, 調整可能なパラメータを用いて特定の出力を設計する. そのうえ, 回転型振子の機械パラメータの性質を用いて, 真上平衡点のまわりで線形化したモデルの極零関係を使用し, 真上平衡点で回転型振子を局所安定化する強安定化制御器が常に存在することを示す. また, 制御器の設計手法も示す. ここで得られた理論結果の有効性は数値シミュレーションにより示し, さらにシステムのある程度の不確かなパラメータに対して, 設計した制御器のロバスト性を示す.

なお, 回転型振子の線形化モデルの伝達関数の極配置は Acrobot や Pendubot と異なるため, 文献 [23] の安定化制御器の設計手法は本論文の回転型振子に適用できない. 本論文で提示する設計手法は, 文献 [23] の Acrobot や Pendubot とは異なり, 回転型振子を真上平衡点で局所安定化する強安定化制御器の存在性を初めて示したことを指摘しておく.

## 1.2 本論文の構成

本論文は全 6 章で構成されており, 以下に各章の概要を示す.

第 2 章では, 回転型振子システムのモデルを示し, 非線形の運動方程式を導出する. また, 安定化制御器の設計で用いるため, システムを真上平衡点のまわりで線形化したモデルを導出する. そして, 強安定化制御器について解説し, 強安定化可能であるための諸条件についてまとめる. また, 以降の理論展開, 制御器設計で必要となる最適レギュレータ, 安定性理論, 平衡点の分類について概略を述べる.



第 3 章では、回転型振子システムの総エネルギーに着目したエネルギー制御法による振り上げ制御問題を扱う。まず、制御則の特異点を回避するための既存の十分条件に対して、その必要十分条件を新たに提示する。さらに、振子の大域定常動きの解析を行い、真下平衡点がサドル型平衡点であることを関連付けることにより、従来研究において仮定されていた、振子が真下平衡点に留まるのを防ぐための初期条件と制御パラメータの制約を取り除けることを示す。

第 4 章では、エネルギー制御法によって設計した回転型振子の振り上げ制御則の有効性を実機を用いて検証する。実験は、Quanser Consulting Inc. で開発された実験システムを使用して、エネルギー制御法の有効性を示すとともに、システムの開発元によって提供されている振り上げ制御則のサンプルを、本論文の結果と比較する。

第 5 章では、回転型振子の真上平衡点における強安定化の問題を扱う。線形近似モデルの状態方程式と特定の出力から構成されるシステムの伝達関数における極零点の関係を使用して、真上平衡点で回転型振子を局所安定化する強安定化制御器が常に存在すること、および強安定化制御器の設計手法を示す。また、数値シミュレーションによって、設計した強安定化制御器が有効であることを確認し、さらに、設計した強安定化制御器がシステムのある程度の不確かなパラメータに対してもロバストであることを示す。

第 6 章で、本研究で得られた結果を総括し、今後の研究課題について述べる。

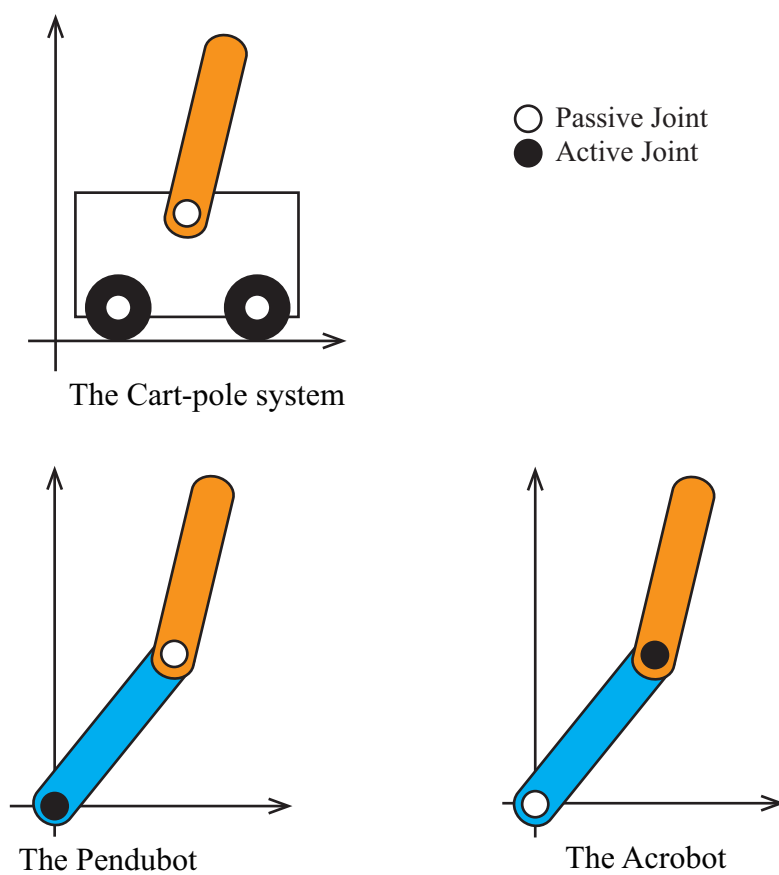


Fig. 1.1 Typical examples of pendulum underactuated systems (2D).

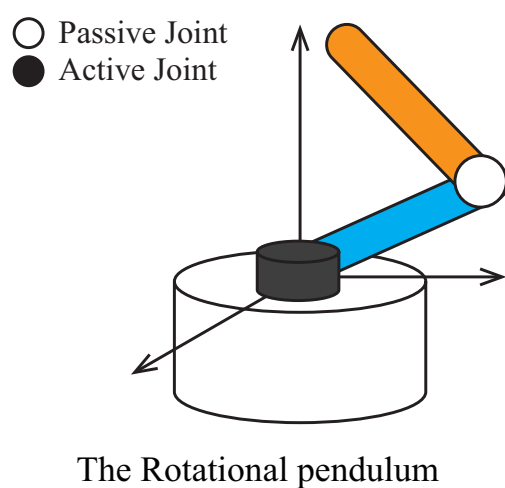


Fig. 1.2 Typical examples of pendulum underactuated systems (3D).

## 第2章 対象モデルと安定化理論

### 2.1 緒言

本章では、まず、回転型振り子システムのモデルを示し、非線形の運動方程式を導出する。次に、安定化制御器の設計で用いるため、システムを真上平衡点のまわりで線形化したモデルを導出する。また、強安定化制御器について解説し、強安定化可能であるための諸条件についてまとめる。そして、次章以降の展開で基礎となるリアプノフの安定性理論、ラサールの不変定理、平衡点の分類について概略を述べる。

### 2.2 回転型振り子のモデル

回転型振り子は、固定された軸を中心に水平面内を回転する駆動アームと、そのアームの先端に非駆動関節を介して取り付けられた振り子から構成され、振り子は垂直平面内を自由に回転できるようなシステムである。Fig. 2.1に回転型振り子システムのモデルを示す。

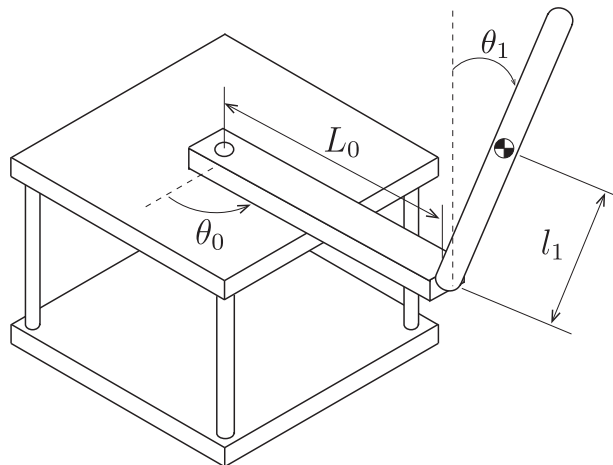


Fig. 2.1 The rotational pendulum system.

Table 2.1 System parameters

記号	説明
$L_0$	アームの長さ [m]
$I_0$	アームの重心まわりの慣性モーメント [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]
$\theta_0$	アームの角度 [rad]
$m_1$	振子の質量 [kg]
$l_1$	振子の重心までの長さ [m]
$J_1$	振子の重心まわりの慣性モーメント [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]
$\theta_1$	振子の角度 [rad]
$\tau$	アームの駆動トルク [ $\text{N} \cdot \text{m}$ ]

システムの各機械パラメータは以下のとおりである.

まず, 制御器設計, および解析のため, 回転型振子の運動方程式を導出する. 振子の重心位置  $(x_c, y_c, z_c)$  は以下のように表される.

$$\begin{cases} x_c = L_0 \cos \theta_0 - l_1 \sin \theta_0 \sin \theta_1 \\ y_c = L_0 \sin \theta_0 + l_1 \cos \theta_0 \sin \theta_1 \\ z_c = l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

このとき, アームの回転運動エネルギー  $k_{r0}$ , 振子の回転運動エネルギー  $k_{r1}$ , 振子の並進運動エネルギー  $k_{t1}$  はそれぞれ

$$k_{r0} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 \quad (2.2)$$

$$k_{r1} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (2.3)$$

$$k_{t1} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) \quad (2.4)$$

で表される. ここで,  $\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c$  は次式である.

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -L_0 \sin \theta_0 \dot{\theta}_0 - l_1 \cos \theta_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_0 - l_1 \sin \theta_0 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_c = L_0 \cos \theta_0 \dot{\theta}_0 - l_1 \sin \theta_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_0 + l_1 \cos \theta_0 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{z}_c = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

システムの運動エネルギー  $K$  は、次式で求まる.

$$\begin{aligned} K &= k_{r0} + k_{r1} + k_{t1} \\ &= \frac{1}{2} (I_0 \dot{\theta}_0^2 + J_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_0^2 \\ &\quad + 2m_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

真下平衡点における位置エネルギーを零とすると、システムの位置エネルギーは次式で表される.

$$P(q) = m_1 g l_1 (\cos \theta_1 - 1) \quad (2.7)$$

ただし、 $g$  は重力加速度である.

ラグランジアン  $L$  は (2.6), (2.7) 式より、次式で求まる.

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ &= \frac{1}{2} (I_0 \dot{\theta}_0^2 + J_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_0^2 \\ &\quad + 2m_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1) - m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_1 g l_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

オイラー・ラグランジュ方程式を解き、回転型振子の運動方程式を導出する.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau W_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.9)$$

ここで、 $q$  は一般化座標であり、 $q$ ,  $W$  はそれぞれ次式である.

$$q = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

である.

(2.9) 式の左辺の各項を計算すると以下のように求まる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) &= (I_0 + m_1 (L_0^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1)) \ddot{\theta}_0 + m_1 l_1^2 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\ &\quad + m_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_0} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - m_1 L_0 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 \quad (2.15)$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = & (I_0 + m_1(L_0^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1)) \ddot{\theta}_0 + m_1 l_1^2 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\ & + m_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 L_0 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 = \tau \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & (J_1 + m_1 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_1 L_0 l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 \\ & - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0^2 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

を得ることができる. したがって, 運動方程式は以下の式で表される.

$$D(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) = W\tau \quad (2.18)$$

ここで

$$D = \begin{bmatrix} a_0 + a_3 \sin^2 \theta_1 & a_2 \cos \theta_1 \\ a_2 \cos \theta_1 & a_1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$H = \begin{bmatrix} -a_2 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + a_3 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\ -a_3 \sin(2\theta_1) \dot{\theta}_0^2 / 2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -b_0 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

である. ただし,

$$\begin{cases} a_0 = I_0 + m_1 L_0^2 \\ a_1 = J_1 + m_1 l_1^2 \\ a_2 = m_1 l_1 L_0 \\ a_3 = m_1 l_1^2 \\ b_0 = m_1 l_1 g \end{cases} \quad (2.22)$$

である.

システムの総エネルギー  $E(q, \dot{q})$  は, (2.6) 式と (2.7) 式の  $P(q)$  より, (2.21), (2.22)

式を用いて次式で表される.

$$\begin{aligned}
 E(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} ((a_0 + a_3 \sin^2 \theta_1) \dot{\theta}_0^2 + a_1 \dot{\theta}_1^2 + 2a_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1) + P(q) \\
 &= \frac{1}{2} (D_{11} \dot{\theta}_0^2 + D_{12} \dot{\theta}_1^2 + D_{21} \dot{\theta}_1^2 + D_{22} \dot{\theta}_1^2) + P(q) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + P(q) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + P(q)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

## 2.3 実機モデル

理論結果の有効性を検証するために Quanser Consulting Inc. [14] で開発された実験システムを使用する. 実験システムでは, Fig. 2.2 に示すように, 振子の角度  $\alpha$  は振子が下向きの状態から測定された振子の角度であり, 文献 [6, 15] の理論検証で用いたモデルと振子の角度の取り方が異なる.

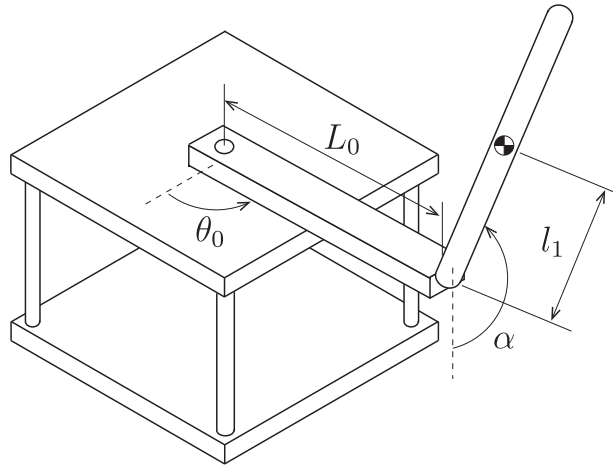


Fig. 2.2 The rotational pendulum (Experiment system).

Fig. 2.2 に示す実験システムの回転型振子の運動方程式は, 以下の式で表される.

$$D_e(\theta) \ddot{\theta} + H_e(\theta, \dot{\theta}) + G_e(\theta) = W\tau \tag{2.24}$$

ここで,

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

は一般化座標であり,

$$D_e = \begin{bmatrix} a_0 + a_3 \sin^2 \alpha & a_2 \cos \alpha \\ a_2 \cos \alpha & a_1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$H_e = \begin{bmatrix} -a_2 \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 + a_3 \sin(2\alpha) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\ -a_3 \sin(2\alpha) \dot{\theta}_0^2 / 2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$G_e = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

である. なお,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_0$  は, (2.22) 式と同じである. また, 実機モデルと文献 [6, 15] のモデルの一般化座標  $\theta$  と  $q$  には, 次式の関係があり, この関係式を用いることにより, 一般化座標の置き換えを行い, 理論解析結果を実機へ適用する.

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} q \quad (2.30)$$

システムの各機械パラメータを Table 2.2 にまとめる. 振子の角度を除いて, 各パラメータについて同じ記号を用いる.

Table 2.2 System parameters (correlation table)

記号 (理論)	記号 (実機)	説明
$L_0$	$L_0$	アームの長さ [m]
$I_0$	$I_0$	アームの重心まわりの慣性モーメント [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]
$\theta_0$	$\theta_0$	アームの角度 [rad]
$m_1$	$m_1$	振子の質量 [kg]
$l_1$	$l_1$	振子の重心までの長さ [m]
$J_1$	$J_1$	振子の重心回りの慣性モーメント [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]
$\theta_1$	$\alpha$	振子の角度 [rad]
$\tau$	$\tau$	アームの駆動トルク [ $\text{N} \cdot \text{m}$ ]



システムの総エネルギー  $E_e(\theta, \dot{\theta})$  は (2.6), (2.7) 式より次式で表される.

$$E_e(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T D(\theta) \dot{\theta} + P_e(\theta). \quad (2.31)$$

ここで,  $P_e(\theta)$  は, 真下平衡点における位置エネルギーを零とすると, 次式で定義される.

$$P_e(\theta) = b_0(1 - \cos \alpha). \quad (2.32)$$

## 2.4 真上平衡点近傍における線形化

本論文において, 安定な安定化制御器の存在性と設計を示すために, 真上平衡点のまわりで線形化したモデルを導出する.

(2.24) 式を真上平衡点 ( $\alpha = \pi$ ) の近傍で線形化すると次式を得る.

$$D_l(\theta) \ddot{\theta} + H_l(\theta, \dot{\theta}) + G_l(\theta) = W\tau \quad (2.33)$$

$$D_l = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$H_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$G_l = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0(\pi - \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

状態変数を以下定義し, 制御入力を  $u = \tau$  とする.

$$x = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \alpha - \pi \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

真上平衡点の近傍  $x = 0$  で線形化したシステムの状態空間表現は以下のように表すことができる.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.38)$$

ただし,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{a_2 b_0}{a_0 a_1 - a_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_0 b_0}{a_0 a_1 - a_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_1}{a_0 a_1 - a_2^2} \\ \frac{a_2}{a_0 a_1 - a_2^2} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

ここで,

$$a_0 a_1 - a_2^2 > 0 \quad (2.41)$$

であり, (2.41) 式は, (2.22) 式を用いて直接確認できる.

次に, (2.38) 式に対して, 次式の可制御性行列  $U_c$  を用いて可制御性を確認する.

$$U_c = \begin{bmatrix} B, & AB, & A^2 B, & A^3 B \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_1}{a_0 a_1 - a_2^2} & 0 & \frac{a_2^2 b_0}{(-a_0 a_1 + a_2^2)^2} \\ 0 & \frac{a_2}{a_0 a_1 - a_2^2} & 0 & \frac{a_0 a_2 b_0}{(-a_0 a_1 + a_2^2)^2} \\ \frac{a_1}{a_0 a_1 - a_2^2} & 0 & \frac{a_2^2 b_0}{(-a_0 a_1 + a_2^2)^2} & 0 \\ \frac{a_2}{a_0 a_1 - a_2^2} & 0 & \frac{a_0 a_2 b_0}{(-a_0 a_1 + a_2^2)^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

(2.39), (2.40), (2.42) 式より, 次式を得る.

$$|U_c| = -\frac{a_2^2 b_0^2}{(a_0 a_1 - a_2^2)^4} \neq 0. \quad (2.43)$$

これは  $\text{rank}(U_c) = 4$  を示す. したがって回転型振子は真上平衡点近傍で可制御である.

## 2.5 最適レギュレータ

レギュレータとは、外乱によって平衡点からずれた状態変数をすみやかにもとに帰すための、閉ループシステムである [25]。以下に、最適レギュレータの概略をまとめる。

$m$  入力 of 制御対象

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad A(n \times n), B(n \times m) \quad (2.44)$$

において、全状態変数  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  が、直接測定可能とし、制御入力を以下のように与える。

$$u = -Fx(t) \quad (2.45)$$

ここで、 $F$  はフィードバック係数行列 ( $m \times n$ ) である。(2.45) 式を (2.44) 式に代入すると次式を得る。

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) \quad (2.46)$$

一般に制御前のシステム (2.44) を開ループシステム、制御後のシステム (2.46) を閉ループシステムと呼ばれている。

(2.46) の解は次式となる。

$$x(t) = \exp[(A - BF)t] x(0) \quad (2.47)$$

ここで  $x(0)$  を初期外乱といい、 $-\infty < t < 0$  の区間で存在した外乱によって原点 0 (平衡点) からずれた、 $t = 0$  での初期ベクトルを示す。よって、 $F$  を選んで  $A - BF$  が安定行列にできれば、すべての  $x(0) \neq 0$  に対して、 $x(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) となり、状態変数を漸近的に原点へ帰することができる。このときの閉ループシステムをレギュレータという。

また、 $A - BF$  の固有値をレギュレータの極といい、これが複素左半面において、より左側に設定されれば、速応性のある応答になり、より速く  $x(t) \rightarrow 0$  に収束するが、 $x(t)$  の応答の振れ幅が増大する場合もある。また、フィードバック信号も大きくなるといった問題もある。

このような問題を解決する一つの方法に、適当な評価関数を最小にするように  $F$  を決定し、諸要求の妥協点を見つける方法がある。これが、最適フィードバック制御であり、これによって設計されたレギュレータを最適レギュレータという。

## 最適レギュレータの設計

(2.44) 式の  $(A, B)$  が可制御であるとき, 評価関数

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (2.48)$$

を最小にする制御入力  $u(t)$  を求める. ここで,  $R(m \times m)$ ,  $Q(n \times n)$  は設計仕様として与えられる重み行列であり,  $R > 0$ ,  $Q \geq 0$  である.

(2.48) 式において,

$$J = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt \quad (2.49)$$

$$J_2 = \int_0^\infty u(t)^T R u(t) dt \quad (2.50)$$

として分けると,  $J_1$  は状態変数の 2 乗積分誤差を表し, この項を小さくすることは,  $x(t)$  を速やかに収束させる (速応性が向上する) ことを意味する.  $J_2$  は入力変数の 2 乗積分値を表し, この項を小さくすることは制御に必要なエネルギーを小さくすることを意味する. これらがともに小さくできるならば, よい制御システムといえるが,  $J_1$  と  $J_2$  に対する要求は相反するため, 重要と思われる変数に, より大きい重みを課すことにより,  $J$  の最小化が行われる.

(2.48) 式を最小にする最適制御入力は, これを  $u^0(t)$  とおくと次式の状態フィードバックとなる.

$$u^0(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (2.51)$$

ここで,  $P(n \times n)$  は, リカッティ方程式と呼ばれる次式を満たす正定唯一解をとるものとする.

$$PA + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.52)$$

(2.51) 式において

$$F^0 = R^{-1} B^T P \quad (2.53)$$

を最適フィードバック行列と呼び, (2.51) 式を (2.44) 式に代入したときの次式の最適な閉ループシステムを最適レギュレータという.

$$\dot{x}(t) = (A - B R^{-1} B^T P) x(t) \quad (2.54)$$

最適レギュレータは漸近安定，すなわち

$$\begin{aligned} A^0 &= A - BF^0 \\ &= A - BR^{-1}B^T P \end{aligned} \quad (2.55)$$

は安定行列となり，その固有値 (最適極) は  $Q$  と  $R$  から自動的に決定される．なお， $J$  の最小値は次式で与えられる．

$$J_{\min} = x(0)^T P x(0) \quad (2.56)$$

なお，リカッティ方程式は非線形代数方程式のため，その解行列  $P$  を求めることは難しく，通常，計算機が利用される．

## 2.6 強安定化制御

Fig. 2.3 に示すフィードバックシステムを考える．ここで，線形プラント  $P(s)$  は厳密にプロパーであり，線形制御器  $K(s)$  はプロパーであるとする． $r$  は目標値， $e = r - y$  は偏差， $u$  は操作信号， $d$  は外乱， $y$  は出力 (制御量) である．

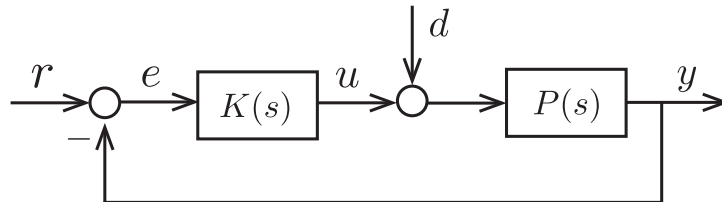


Fig. 2.3 Feedback control system.

プラント  $P(s)$  が安定な制御器  $K(s)$  によって安定化できることをプラント  $P(s)$  は強安定化可能であるという．強安定化は重要であるが，すべてのプラントは強安定化可能ではない． $P(s)$  が強安定可能であるための必要十分条件を以下の補題にまとめる．

**補題 1** (文献 [16])  $P(s)$  が強安定化可能であるための必要十分条件は， $P(s)$  が非負の実軸上において，すべての実零点の組の間に偶数個の極をもつことである．ただし， $s = \infty$  は  $P(s)$  の零点の中に含まれるものとする．

### 強安定化可否の数値例

以下に強安定化制御器の存在性について数値例を示す．次式の  $P(s)$  が与えられたとする．

$$P(s) = \frac{s - a}{(s - 2)(s - 4)} \quad (2.57)$$

このとき，零点は  $a, \infty$ ，極は 2, 4 が得られる．

まず， $a = 1$  の場合を考えると，Fig. 2.4 のように零点と極を表すことができる．よって，実零点の組の間に 2 個の極をもつため，補題 1 より，強安定化制御器が存在することがわかる．

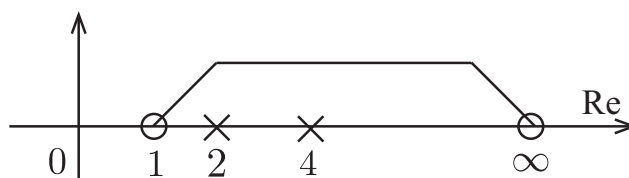


Fig. 2.4 Real poles and real zeros ( $a = 1$ ).

次に， $a = 3$  の場合を考えると，の Fig. 2.5 のように零点と極を表すことができる．よって，実零点の組の間に 1 個の極をもつため，補題 1 より，強安定化制御器が存在しないことがわかる．

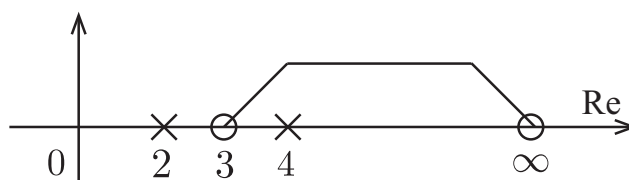


Fig. 2.5 Real poles and real zeros ( $a = 3$ ).

## 2.7 リアプノフの安定性理論

ここでは，非線形システムの安定性を判別するうえで欠かすことができない理論である，リアプノフの安定性理論について概略を述べる．この理論は，制御器を設計するうえで非常に重要となる [25, 26]．

また，その安定判別法は，システムの解そのものを求めることなく，システムの安定性を解析的に調べることができる特徴をもち，解の平衡状態からの距離の時間的変化を状態の正定関数を用いて評価する方法である．

いま，以下の非線形システムが与えられたとする．

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (2.58)$$

本システムにおいて， $f(x_e) = 0$  を満たす平衡点  $x_e$  は，原点  $x = 0$  にあるものとする．ただし，この仮定が成立しないときには，平衡点を原点に移動すればよい．

リアプノフの安定性の定義は  $x(0)$  が平衡点 ( $x = 0$ ) から少しずれたとき， $x(t)$  が依然として原点近傍に留まり得るか否かを述べたものであり，次のように定義する．

1. 任意に与えられた  $\epsilon > 0$  に対して正の実数  $\delta > 0$  が見つかり， $\|x(0)\| < \delta$  を満たす，すべての  $x(0)$  と， $t \geq 0$  について， $\|x(t)\| < \epsilon$  となるならば，原点  $x = 0$  を (リアプノフの意味で) 安定という．
2. 安定で，かつ，ある  $\delta' > 0$  が見つかり， $\|x(0)\| < \delta'$  のすべての  $x(0)$  に対して， $x(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) となるならば，原点を漸近安定という．
3. ある  $\epsilon > 0$  に対し，どんな  $\delta > 0$  を選んでも  $\|x(0)\| < \delta$  を満たすある  $x(0)$  に対して， $\|x(t)\| > \epsilon$  となる  $t > 0$  が存在するならば，原点を不安定という．

これらの定義において， $x(t)$  の軌道は Fig. 2.6 で示される．

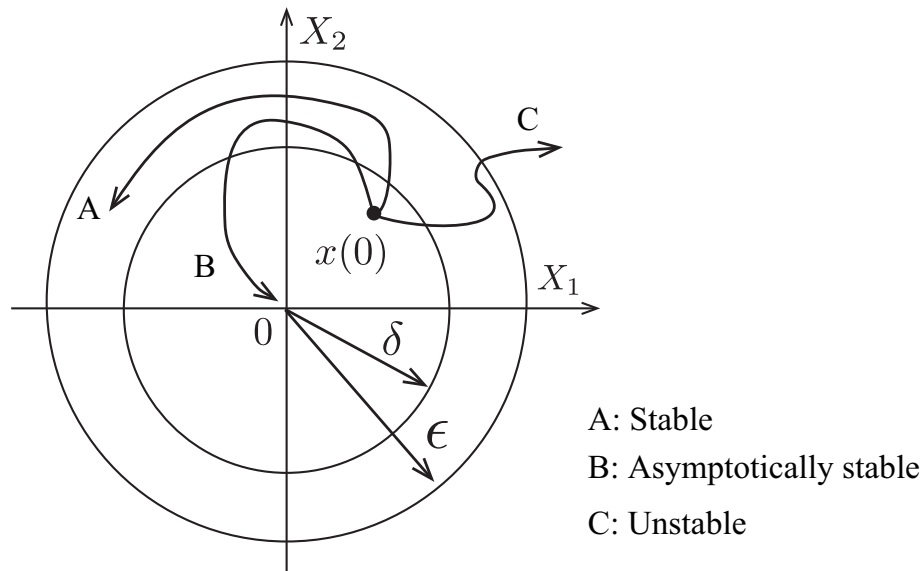


Fig. 2.6 Definition of Lyapunov stability.

次に，大域的な漸近安定性 ( $\delta' \rightarrow \infty$ ) を判定する方法について述べる．

いま,  $\partial V/\partial x$  が連続であるような,  $x(t)$  についてのスカラー関数  $V(x)$  があり, この関数が正定関数, かつ (2.58) 式にそっての時間部分

$$\dot{V}(x) = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right]^T \dot{x} = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right]^T f(x) \quad (2.59)$$

が準負定関数であったとする. この関数  $V(x)$  はシステム (2.58) のリアプノフ関数と呼ばれている. 原点近傍のある範囲内でリアプノフ関数が存在すれば, 原点は安定であり,  $\dot{V}(x)$  が負定関数ならば, 原点は漸近安定であり, 以下の三つの条件が成立するならば, 原点は大域的に漸近安定であることが知られている.

1.  $x$  の全域でリアプノフ関数  $V(x)$  が存在する.
2.  $\|x\| \rightarrow \infty$  のとき,  $V(x) \rightarrow \infty$  となる.
3.  $\dot{V}(x) \equiv 0$  の解  $x(t)$  がシステム (2.58) の原点以外の解と恒等的に一致しない.  
この条件は,  $\dot{V}(x)$  が負定関数ならば自動的に満たされる.

これらの条件は十分条件であり, リアプノフ関数を見つけることができない場合でも安定な可能性があることに注意しておく. また, どのように, リアプノフ関数を構成すればよいかについて, 一般的な決定方法は存在しないが, 物理的なエネルギーに関するものがリアプノフ関数として使われることが多い.

## 2.8 ラサールの不変定理

リアプノフの安定性理論では, リアプノフ関数  $V$  の時間微分  $\dot{V}(x)$  が負定関数ならば大域的に漸近安定であることを示した. ここでは時間微分が半負定関数のときに, 漸近安定となる条件について述べたものが, ラサールの不変定理と呼ばれる不変集合定理である [26]. まず, 以下に不変集合の定義を示す.

### 不変集合の定義

任意の初期状態  $x(t^0) \in W$  から出発したシステム (2.58) の解が, 任意の時刻  $t \leq t^0$  で  $x(t) \in W$  であるとき, この集合  $W$  を不変集合という.



## ラサールの不変定理

(2.58) 式で与えられるシステムに対して, 以下の集合  $\Omega$  が存在するものとする.

$$\Omega = \{(q, \dot{q}) \mid V(q, \dot{q}) \leq c\} \quad (2.60)$$

このとき,  $\Omega$  内の任意の初期状態から出発した解  $x(t)$  は, 集合  $\Omega$  内にとどまり,  $t \rightarrow \infty$  で, 以下の集合  $\Gamma$  に含まれる最大不変集合  $W$  に収束する.

$$\Gamma = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\} \quad (2.61)$$

## 2.9 平衡点の分類

次式のような系を考える.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.62)$$

(2.62) 式が 1 組以上の平衡点  $(x^*, y^*)$  をもつとすると, 以下の条件を満たす.

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

このとき, 平衡点  $(x^*, y^*)$  におけるヤコビ行列は次式で求まる.

$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

ここで,  $f_x, f_y, g_x, g_y$  は次式である.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*, y^*}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x^*, y^*}, \quad g_x = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x^*, y^*}, \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x^*, y^*} \quad (2.65)$$

平衡点  $x^*, y^*$  の分類のため, 以下の計算を行う.

$$\det(J) = f_x g_y - f_y g_x \quad (2.66)$$

$$\text{tr}(J) = f_x + g_y \quad (2.67)$$

$$D = (\text{tr}(J))^2 - 4\det(J) \quad (2.68)$$

このとき, 平衡点は以下のように分類される.

1.  $\det A > 0, \operatorname{tr} A < 0, D \geq 0$  のとき, 安定結節点 (stable node) である.
2.  $\det A > 0, \operatorname{tr} A > 0, D \geq 0$  のとき, 不安定結節点 (unstable node) である.
3.  $\det A < 0$  のとき, サドル (saddle) である.
4.  $\det A > 0, \operatorname{tr} A < 0, D < 0$  のとき, 安定渦状点 (stable focus) である.
5.  $\det A > 0, \operatorname{tr} A > 0, D < 0$  のとき, 不安定渦状点 (unstable focus) である.
6.  $\det A > 0, \operatorname{tr} A = 0$  のとき, 渦心点 (center) である.

## 2.10 結言

本章では, 回転型振子システムのモデルを示し, 非線形の運動方程式を導出した. また, 安定化制御器の設計で用いるため, システムを真上平衡点のまわりで線形化したモデルを導出した. そして, 強安定化制御器, および強安定化可能であるための諸条件について述べた. また, 次章以降の展開で基礎となるリアプノフの安定性理論などの概略についてまとめた.

## 第3章 振り上げ制御

### 3.1 緒言

本章では、回転型振り子システムの総エネルギーに着目したエネルギー制御法による振り上げ制御問題を扱う。まず、制御則の特異点を回避するための既存の十分条件に対して、その必要十分条件を新たに提示する。つぎに、振り子の大域定な動きの解析を行い、真下平衡点がサドル型平衡点であることを関連付けることにより、従来研究において仮定されていた、振り子が真下平衡点に留まるのを防ぐための初期条件と制御パラメータの制約を取り除けることを示す。さらに、数値シミュレーションによって、理論解析の結果の有効性を確認する。

### 3.2 エネルギー制御法による振り上げ制御則

回転型振り子における振り上げ・安定化制御は、Fig. 3.1 で示すように、振り子を直立位置まで振り上げるとともに望ましい位置にアームを駆動し、振り子とアームをそれぞれ望ましい位置で安定化させることを目的とする。

本節では Fantoni ら [6] のエネルギー制御法による振り上げ制御則を再考し、制御則がすべての振り子の状態に対して特異点をもたないための必要十分条件を示す。これは本章の主要な結果である。

回転型振り子の真上平衡点を次式で表す。

$$(\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = (0, 0, 0, 0) \quad (3.1)$$

次式で示すように回転型振り子の全エネルギー  $E(q, \dot{q})$  を任意の初期状態から、真上平衡点でのエネルギーに収束させる制御則  $\tau$  が設計できれば、制御目的が達成される。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(q, \dot{q}) = E_r, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_0 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_0 = 0 \quad (3.2)$$

ここで  $E_r = b_0(\cos 0 - 1) = 0$  は、システムの真上平衡点でのエネルギーである。

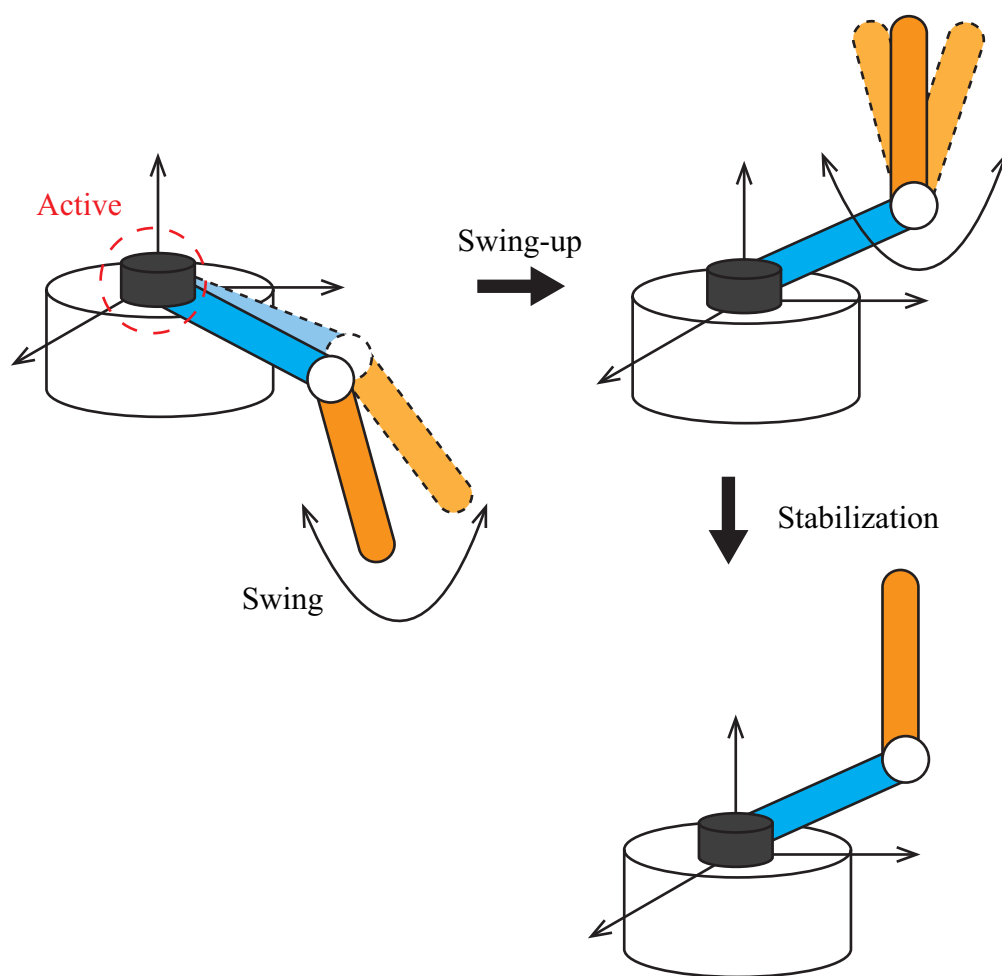


Fig. 3.1 Swing-up and stabilizing control.

制御器設計のため、以下のリアプノフ関数の候補 [6] を用いる.

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} E(q, \dot{q})^2 + \frac{k_\omega}{2} \dot{\theta}_0^2 + \frac{k_\theta}{2} \theta_0^2 \quad (3.3)$$

$k_E > 0$ ,  $k_\omega > 0$ ,  $k_\theta > 0$  は制御パラメータである. (2.18) 式の解に沿って  $V$  の時間微分をとると次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{k_E}{2} (2\dot{E}E) + \frac{k_\omega}{2} (2\ddot{\theta}_0\dot{\theta}_0) + \frac{k_\theta}{2} (2\dot{\theta}_0\theta_0) \\ &= k_E \dot{E}E + k_\omega \ddot{\theta}_0\dot{\theta}_0 + k_\theta \dot{\theta}_0\theta_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで, (2.23) 式より,

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \left( \frac{1}{2} \ddot{q}^T D + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D} \right) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T D \ddot{q} + \dot{P} \\ &= \dot{q} D \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D} \dot{q} + b_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ &= \dot{q}^T (W\tau - H - G) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D} \dot{q} + \dot{q}^T G \\ &= \dot{q}^T W\tau - \dot{q}^T H + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D} \dot{q} \\ &= \dot{q}^T W\tau \\ &= \dot{\theta}_0 \tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

を用いると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_E \dot{E}E + k_\omega \ddot{\theta}_0\dot{\theta}_0 + k_\theta \dot{\theta}_0\theta_0 \\ &= \dot{\theta}_0 (k_E E\tau + k_\omega \ddot{\theta}_0 + k_\theta \theta_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

ある定数  $k_\delta > 0$  に対して,

$$k_E E\tau + k_\omega \ddot{\theta}_0 + k_\theta \theta_0 = -k_\delta \dot{\theta}_0 \quad (3.7)$$

の  $\tau$  を選ぶことができるならば, 次式が成立する.

$$\dot{V} = -k_\delta \dot{\theta}_0^2 \leq 0 \quad (3.8)$$

つぎに, どのような条件の下で, (3.7) 式が任意の  $(q, \dot{q})$  に対し,  $\tau$  について解くことができるかを議論する.  $\theta_0 = W^T q$  と (2.18) 式を用いることにより次式を得る.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 &= W^T \ddot{q} \\ &= W^T D^{-1} (W\tau - H - G) \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) 式を (3.7) 式に代入すると次式を得る.

$$\Lambda(q, \dot{q})\tau = k_\omega W^T D^{-1}(H + G) - k_\theta \theta_0 - k_\delta \dot{\theta}_0 \quad (3.10)$$

ここで

$$\Lambda(q, \dot{q}) = k_E E(q, \dot{q}) + k_\omega W^T D^{-1}(q)W \quad (3.11)$$

である. したがって,  $\forall q, \forall \dot{q}$  に対して,

$$\Lambda(q, \dot{q}) \neq 0 \quad (3.12)$$

のとき, 次式を得る.

$$\tau = \frac{k_\omega W^T D^{-1}(H + G) - k_\theta \theta_0 - k_\delta \dot{\theta}_0}{\Lambda} \quad (3.13)$$

### 3.3 特異点の回避条件

$\Lambda(q, \dot{q}) = 0$  を満たす状態  $(q, \dot{q})$  は制御則 (3.13) の特異点といわれ, 制御入力トルクが無限大になる. 本節では, (3.12) 式が成立するための, つまり制御則 (3.13) が特異点をもたないための必要十分条件を求める.

$E(q, \dot{q}) \geq P(q)$  より次式を得る.

$$\Lambda(q, \dot{q}) \geq k_E P(q) + k_\omega W^T D^{-1}(q)W \quad (3.14)$$

したがって, 制御則 (3.13) が特異点をもたないための必要十分条件は次式が成立することである.

$$\frac{k_\omega}{k_E} > \max_q f(q); \quad f(q) = \frac{-P(q)}{W^T D^{-1}(q)W} \quad (3.15)$$

これは (3.12) 式が成立することを示す.

背理法によって (3.15) 式は, (3.12) 式が成立するために必要であることを示す. この目的を達成するために,

$$\frac{k_\omega}{k_E} \leq \max_q f(q) \quad (3.16)$$

を満たす  $k_\omega$  と  $k_E$  を与え,  $\Lambda(q(0), \dot{q}(0)) = 0$  のような初期条件  $(q(0), \dot{q}(0))$  が存在することを示す.

$\zeta \in \mathbb{R}^2$  は  $f(q)$  が最大値に達する値とする.

$$\zeta = \operatorname{argmax}_q f(q) \quad (3.17)$$

したがって,

$$f(\zeta) \geq \frac{k_\omega}{k_E} \quad (3.18)$$

次式の様な任意の  $\eta \in \mathbb{R}^2$  を選ぶ.

$$\frac{1}{2}\eta^T D(\zeta)\eta = W^T D^{-1}(\zeta)W \left( f(\zeta) - \frac{k_\omega}{k_E} \right) \geq 0 \quad (3.19)$$

これは

$$E(\zeta, \eta) + \frac{k_\omega}{k_E} W^T D^{-1}(\zeta)W = \frac{\Lambda(\zeta, \eta)}{k_E} = 0 \quad (3.20)$$

を示す.

したがって, 初期状態  $(q(0), \dot{q}(0)) = (\zeta, \eta)$  に対して, 次式が得られる.

$$\Lambda(q(0), \dot{q}(0)) = \Lambda(\zeta, \eta) = 0 \quad (3.21)$$

よって, (3.15) 式は (3.12) 式が成立するための必要十分条件である. ここで, (3.15) 式の右辺を計算することによって, 次式を得ることに注意する.

$$\frac{k_\omega}{k_E} > \frac{b_0}{a_1} \max_{\theta_1} \{(1 - \cos \theta_1) \det(D)\} \quad (3.22)$$

つぎに, 閉ループシステムの解が漸近する最大不変集合を決定するために LaSalle の定理 [27] を (2.18) 式と (3.13) 式から成る閉ループシステムに適用すると以下の補題が得られる.

**補題 2** (2.18) 式と正のパラメータ  $k_E, k_\omega, k_\theta, k_\delta$  の制御則 (3.13) から成る閉ループシステムにおいて, 任意の  $(q, \dot{q})$  に対し, 制御則 (3.13) に特異点が存在しないための必要十分条件は  $k_\omega$  と  $k_E$  が (3.15) 式を満たすことである. このとき, 次式が成立する.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(q, \dot{q}) = E^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_0 = \theta_0^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_0 = 0 \quad (3.23)$$

ここで,  $E^*$  と  $\theta_0^*$  は定数である. さらに,  $t \rightarrow \infty$  のとき閉ループ解  $(q, \dot{q})$  は以下の不変集合  $\Omega$  に収束する.

$$\Omega = \left\{ (q, \dot{q}) \mid \theta_0 \equiv \theta_0^*, \quad \dot{\theta}_1^2 \equiv \frac{2E^* + 2b_0(1 - \cos \theta_1)}{a_1} \right\} \quad (3.24)$$

補題 2 について以下の注意を示す.

**注意 1** Fantoni ら [6] は制御則 (3.13) の特異点を回避するために以下の十分条件を提案している.

$$\frac{k_\omega}{k_E} > 2b_0(a_0 + a_3). \quad (3.25)$$

$1 - \cos \theta_1 \leq 2$  ( $\cos \theta_1 = -1$  のとき等式が成立する) と  $\det(D) \leq a_0 + a_3$  ( $\cos \theta_1 = 0$  のとき等式が成立する) より, (3.25) 式の条件は, 次式を用いて (3.22) 式から導出することができる.

$$\begin{aligned} \max_{\theta_1} (1 - \cos \theta_1) \det(D) &\leq \max_{\theta_1} (1 - \cos \theta_1) \max_{\theta_1} \det(D) \\ &< 2a_1(a_0 + a_3). \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.4 エネルギーの収束性と真下平衡点の安定に関する解析

補題 2 において, 制御則に特異点をもたない条件, およびそのときシステムのエネルギー  $E(q, \dot{q})$  は  $E^*$ , アームの角度  $\theta_0$  は  $\theta_0^*$  に収束することを述べた. 振り上げ制御目的は, (3.2) 式が成立することであり, エネルギーの収束値  $E^*$  が目標値  $E_r = 0$  に収束するかどうか, アームの角度  $\theta_0$  が目標値 0 に収束するかどうかについては, 解析が必要である. ここでは, エネルギー制御法による制御則 (3.13) の下で, 真上平衡点近傍まで振子が振り上がるかどうか調査するために (3.24) 式で定義される不変集合  $\Omega$  を解析する. まず, エネルギーの収束値と振子の動きとの関係を調査し, つぎに真下平衡点の安定性を解析する. 主要な結果をまとめると以下の定理が得られる.

**定理 1** (2.18) 式と正のパラメータ  $k_E, k_\omega, k_\theta, k_\delta$  の制御則 (3.13) から成る閉ループシステムにおいて,  $k_E$  と  $k_\omega$  は (3.15) 式を満たすと仮定すると, 以下の内容が成立する.

- 1 閉ループシステムの解  $(q(t), \dot{q}(t))$  は  $t \rightarrow \infty$  で不変集合  $\Omega$  に収束する.

$$\Omega = \Omega_r \cup \{(0, \pi, 0, 0)\}, \quad (3.27)$$

ここで

$$\Omega_r = \left\{ (q, \dot{q}) \left| \theta_0 \equiv 0, \dot{\theta}_1^2 \equiv \frac{2b_0(1 - \cos \theta_1)}{a_1} \right. \right\}. \quad (3.28)$$



- 2 閉ループシステムに対して，真下平衡点  $(\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = (0, \pi, 0, 0)$  におけるヤコビ行列は開左半平面，及び右半平面にそれぞれ二つの固有値を有する．その平衡点はサドル型平衡点である．

**証明 1** まず，定理 1-1 を証明する．エネルギーの収束値  $E^*$  を解析することによって，(3.24) 式の不変集合  $\Omega$  を特徴づけ，回転型振子の動きに関する解析を行う．まず， $E \equiv E^*$  と  $\theta_0 \equiv \theta^*$  を (3.7) 式に代入すると次式を得る．

$$k_E E^* \tau + k_\theta \theta_0^* \equiv 0 \quad (3.29)$$

エネルギーの収束値  $E^*$  について， $E^* = 0$  と  $E^* \neq 0$  の 2 つの場合に分けて解析を行う．

**Case 1:**  $E^* = 0$

(3.29) 式より直接  $\theta_0^* = 0$  を得る． $E^* = 0$  と  $\theta_0^* = 0$  を (3.24) 式に代入すると閉ループ解  $(q(t), \dot{q}(t))$  は  $t \rightarrow \infty$  で (3.28) 式で定義された不変集合  $\Omega_r$  に収束することが示される．

また，回転型振子が，

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{2b_0(1 - \cos \theta_1)}{a_1} \quad (3.30)$$

に沿って動く場合を考え，次式が成り立つことを以下に示す．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1 = 0 \pmod{2\pi}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_1 = 0 \quad (3.31)$$

まず，(3.30) 式を次のように書き換える．

$$\dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{2b_0(1 - \cos \theta_1)}{a_1}} \quad (3.32)$$

あるいは，

$$\dot{\theta}_1 = -\sqrt{\frac{2b_0(1 - \cos \theta_1)}{a_1}} \quad (3.33)$$

つぎに，(3.32) 式の場合を考える． $\theta_1$  はモジュロ  $2\pi$  の意味で扱うため，

$$\theta_1 \in [-2\pi, 0] \quad (3.34)$$

のみを考えればよい.

$$-2\pi < \theta_1 < 0, \quad (3.35)$$

のとき,  $\dot{\theta}_1 > 0$  より,  $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t))$  が  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $(0, 0)$  に収束する. よって, (3.31) 式が成立する. なお,  $(\theta_1, \dot{\theta}_1) = (-2\pi, 0)$  と  $(\theta_1, \dot{\theta}_1) = (0, 0)$  は, (3.32) 式と同じ平衡点であるため, (3.32) 式は, ホモクリニック軌道である [28]. また, (3.33) 式についても同様に, (3.31) 式を示すことができる.

したがって, 閉ループシステムの解が,  $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t))$  が,  $t \rightarrow \infty$  のとき, 不変集合  $\Omega_r$  への収束性から, 回転型振子は真上平衡点の任意の近傍まで振り上げられることがわかる.

### Case 2: $E^* \neq 0$

閉ループシステムの解  $(q(t), \dot{q}(t))$  が真下平衡点  $(\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = (0, \pi, 0, 0)$  に収束することを証明する. この目的を達成するため,  $E^* \neq 0$  を用いて (3.29) 式の  $\tau$  が一定であることを得る. このときの  $\tau$  を  $\tau^*$  で示す.

$$k_E E^* \tau^* + k_\theta \theta_0^* \equiv 0 \quad (3.36)$$

$\theta_0 \equiv \theta_0^*$  と  $\tau \equiv \tau^*$  を (2.18) 式に代入すると, 次式を得る.

$$a_2 \left( \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \right) \equiv \tau^* \quad (3.37)$$

(3.37) 式を  $t$  について積分すると次式を得る.

$$\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \equiv \frac{\tau^*}{a_2} t + \sigma_1, \quad \forall t \quad (3.38)$$

ここで,  $\sigma_1$  は定数である. (3.24) 式から  $\dot{\theta}_1$  が有界であることがわかり,  $\tau^* = 0$  を得る. そうでなければ, (3.38) 式の右辺は  $t \rightarrow \infty$  で無限大になる. 時間  $t$  で (3.38) 式を積分すると次式を得る.

$$\sin \theta_1 = \sigma_1 t + \sigma_2, \quad \forall t \quad (3.39)$$

ここで,  $\sigma_2$  は定数である.  $\sin \theta_1$  が有界より,  $\sigma_1 = 0$  が成立する. そうでなければ, (3.39) 式の右辺は,  $t \rightarrow \infty$  のとき有界でない.  $\sin \theta_1 = \sigma_2$  より, これは  $\theta_1$  が  $\theta_1^*$  として定義された定数であることを意味する. よって, (3.36) 式と  $\tau^* = 0$  から  $\theta_0^* = 0$  であることがわかる.  $\theta_0 \equiv \theta_0^* = 0$  と  $\theta_1 \equiv \theta_1^*$  を (2.18) 式と (2.23) 式に代入すると, それぞれ次式を得る.

$$-b_0 \sin \theta_1^* = 0 \quad (3.40)$$

$$E^* = b_0(\cos \theta_1^* - 1) \quad (3.41)$$

(3.40) 式から,  $\sin \theta_1^* = 0$  を得る.  $\theta_1^* = 0$  は  $E^* \neq 0$  の仮定と矛盾する  $E^* = 0$  を得る. したがって,  $\theta_1^* = \pi \pmod{2\pi}$  と  $E^* = -2b_0$  を得る. よって, 閉ループシステムの解は真下平衡点  $(\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = (0, \pi, 0, 0)$  へ収束する. ■

定理 1-2 を証明するため, ヤコビ行列の特性多項式を真下平衡点  $(\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = (0, \pi, 0, 0)$  で直接計算すると次式を得る.

$$s^4 + \beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4 = 0 \quad (3.42)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{a_1 k_\delta}{\gamma} \\ \beta_2 &= \frac{a_1 k_\theta + b_0 k_\omega - 2a_0 b_0^2 k_E}{\gamma} \\ \beta_3 &= \frac{b_0 k_\delta}{\gamma} \\ \beta_4 &= \frac{b_0 k_\theta}{\gamma} \end{aligned}$$

ここで,

$$\gamma = a_1 k_\omega - 2b_0(J_1 a_0 + I_0 a_3)k_E \quad (3.43)$$

つぎに,  $k_\omega$  と  $k_E$  上の条件 (3.15) 式が  $\gamma > 0$  を意味することに注目する. 実際, (3.15) 式に含まれる  $(1 - \cos \theta_1) \det(D)$  において  $\theta_1 = \pi$  は  $\gamma > 0$  を示すことより,

$$\beta_1 > 0, \beta_3 > 0, \beta_4 > 0 \quad (3.44)$$

(3.42) 式のフルビッツの行列式 (例えば文献 [29] を参照) は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} D_1 &= \beta_1 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ 1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1 \beta_2 - \beta_3 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & 0 \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \beta_1 \beta_2 \beta_3 - \beta_3^2 - \beta_1^2 \beta_4 \\ D_4 &= \beta_4 D_3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

直接計算すると以下の重要な不等式を得る.

$$D_3 = -\frac{2a_2^2 b_0^3 k_E k_\delta^2}{\gamma^3} < 0 \quad (3.46)$$

(3.46) 式の結果, 複素平面における (3.42) 式の根の位置を調査するため, ラウスの表 [29] を用いる. (3.45) 式で定義された  $D_2$  が 0 でないならば, (3.42) 式に対してラウスの表の第 1 列における係数は  $\{1, \beta_1, D_2/\beta_1, D_3/D_2, \beta_4\}$  である.  $D_3 < 0$  を用いると第 1 列の係数の符号は  $D_2 < 0$  と  $D_2 > 0$  に対して, それぞれ  $\{+, +, -, +, +\}$  と  $\{+, +, +, -, +\}$  である. これは, 符号の変化は 2 つであることを示す. よって,  $D_2 \neq 0$  であれば,  $J$  は開左半平面と右半平面にそれぞれ 2 つの固有値をもつ.  $D_2 = 0$  であれば, 小さい正数  $\epsilon$  によってラウスの表における  $s^2$  行の零を置き換え, 作表を進め, 以下に示すことができる.

$s^4$	1		$\beta_2$	$\beta_4$
$s^3$	$\beta_1$		$\beta_3$	0
$s^2$	$\epsilon$		$\beta_4$	0
$s^1$	$\frac{\epsilon\beta_3 - \beta_1\beta_4}{\epsilon} \simeq -\frac{\beta_1\beta_4}{\epsilon}$		0	0
$s^0$	$\beta_4$		0	0

上の表の 1 列目に 2 つの符号があり,  $J$  は開左半平面と右半平面にそれぞれ 2 つの固有値をもつ. これは真下平衡点がサドルであることを示している. ■

### 3.5 議論

Fantoni ら [6] は閉ループシステムの解が真下平衡点に収束しないことを保証する方法を研究した. 真下平衡点の位置エネルギーは  $-2b_0$  であるから, 回転型振子の初期状態と制御パラメータに対する以下の制約を提案した.

$$V(0) < 2k_E b_0^2 \quad (3.47)$$

これは次式と  $t = 0$  で等しい.

$$E(q, \dot{q})^2 + \frac{k_\omega}{k_E} \dot{\theta}_0^2 + \frac{k_\theta}{k_E} \theta_0^2 < (2b_0)^2 \quad (3.48)$$

制御則 (3.13) の下で, リアプノフ関数  $V$  は非増加であるため, (3.47) 式の制約は  $t \geq 0$  に対して,  $|E| < 2b_0$  が成立することを保証し, 閉ループシステムの解は真下平衡点へ収束しない.

不変集合  $\Omega_r$  に収束を保証するための回転型振子の初期条件についての制約と (3.48) 式の制御パラメータは、やや厳しいことに注意する。明らかに、そのような条件は、 $|E| \geq 2b_0$  を満たすエネルギー  $E$  での初期状態  $(\theta_0(0), \theta_1(0), \dot{\theta}_0(0), \dot{\theta}_1(0))$  に対して失敗する。たとえ  $t = 0$  で  $|E| < b_0$  を保持したとしても (3.48) 式を満足する制御パラメータ  $(k_E, k_\delta, k_\omega)$  を取ることは、よい振り上げ制御性能を得ないかもしれない。

本論文の解析では、Fantoni ら [6] と異なり、定理 1 に示すように、そのような回転型振子の初期状態と制御パラメータの制約は必要としない。文献 [13] (p. 1225) に基づき、ルベーク測度ゼロの集合を除いたすべての初期状態に対して真下平衡点がサドルであることを証明することにより、すべての閉ループシステムの解  $(\theta_0(t), \theta_1(t), \dot{\theta}_0(t), \dot{\theta}_1(t))$  は  $t \rightarrow \infty$  で不変集合  $\Omega_r$  に収束する。したがって、初期条件と制御パラメータの制約を取り除くことにより、コントロールゲインの調整範囲が広がるため、従来法より、改善された制御性能を達成することができる。

つぎに、(3.28) 式の  $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t))$  についての方程式は、平衡点である  $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t)) = (0, 0)$  でホモクリニック軌道を描くため  $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t))$  は  $\omega$  極限点 [30] として  $(0, 0)$  をもつ。すなわち、 $\lim_{m \rightarrow \infty} (\theta_1(t_m), \dot{\theta}_1(t_m)) = (0, 0)$  に対して、 $m \rightarrow \infty$  で  $t_m \rightarrow \infty$  のような時刻  $t_m$  ( $m = 1, \dots, \infty$ ) が存在する。したがって、振子は真上平衡点の任意の小さな近傍に入ることができる時刻が存在する。

真上平衡点は閉ループシステムににおいて不安定であるということは指摘に値する。この事実を明らかにするために真上平衡点  $(\theta_0, \theta_1, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = (0, 0, 0, 0)$  におけるヤコビ行列の特性方程式は次式である。

$$s^4 + \nu_1 s^3 + \nu_2 s^2 + \nu_3 s + \nu_4 = 0 \quad (3.49)$$

ここで

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{k_\theta}{k_\omega} \\ \nu_2 &= \frac{k_\theta}{k_\omega} - \frac{b_0}{a_1} \\ \nu_3 &= -\frac{b_0 k_\delta}{a_1 k_\omega} \\ \nu_4 &= -\frac{b_0 k_\theta}{a_1 k_\omega} \end{aligned}$$

$\nu_3 < 0$  と  $\nu_4 < 0$  のため、真上平衡点は不安定である。したがって、振子が真上平衡点近くに振り上がるとき、垂直位置で振子の平衡を保つために振り上げ制御則 (3.13) から局所安定化制御器に切り替えなければならない。

局所安定化制御器はたとえば、回転型振子の線形化モデルを LQR 手法を適用することにより、設計することができる。

安定化制御器については 4 章の実機検証，および 5 章の強安定化制御器の設計の中で述べる。

## 3.6 数値シミュレーション

本章では二つの数値シミュレーションにより，上述の理論解析結果の有効性を検証する．まず，Fantoni ら [6] の数値シミュレーションで用いられた機械パラメータ，およびシステムの初期条件を用いた数値シミュレーションを行う．ここでは，Fantoni ら [6] によって示されている制御パラメータを用いた場合と本論文の制御パラメータを用いた場合の結果について比較を行う．

つぎに，システムの初期条件を真下平衡点近傍にした場合の数値シミュレーションを行い，その結果について考察をまとめる．

### 数値シミュレーション 1

Fantoni ら [6] と同じ，以下の機械パラメータを用いる．

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 = 0.215 \text{ m} \\ l_1 = 0.113 \text{ m}, \\ m_1 = 5.38 \times 10^{-2} \text{ kg} \\ I_0 = 1.75 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ J_1 = 1.98 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{array} \right. \quad (3.50)$$

重力加速度は  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  とする．

制御則 (3.13) の特異点を回避するために，Fantoni ら [6] によって提案された十分条件 (3.25) に (3.50) 式の機械パラメータを適用すると

$$\frac{k_\omega}{k_E} > 2.46 \times 10^{-3} \quad (3.51)$$

が得られる．それに対し，本論文の必要十分条件 (3.15) では，

$$\frac{k_\omega}{k_E} > 2.23 \times 10^{-3} \quad (3.52)$$

となる．理論解析によって得られた特異点を回避するための必要十分条件により，特異点を回避するための制御パラメータの選び方について条件が緩和されていることが確認できる．

回転型振子の初期条件は，以下の値とする．初期条件も，Fantoni ら [6] と同じ値である．

$$\begin{cases} \theta_0(0) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ \theta_1(0) = \frac{2.5\pi}{3} \text{ rad} \\ \dot{\theta}_0(0) = 0 \text{ rad/s} \\ \dot{\theta}_1(0) = 0 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (3.53)$$

このとき，Fantoni ら [6] は，以下の制御パラメータを選択している．

$$\begin{cases} k_E = 480 \\ k_\omega = 1 \\ k_\delta = 1 \\ k_\theta = 1 \end{cases} \quad (3.54)$$

ここで，四つのパラメータ  $k_E, k_\omega, k_\delta, k_\theta$  は独立していないことに注目する．実際に，(3.13) 式より， $(k_E, k_\omega, k_\delta, k_\theta)$  と  $(k_E, k_\omega, k_\delta, k_\theta)/k_E$  は同じ制御器になることがわかる．したがって，(3.54) 式と

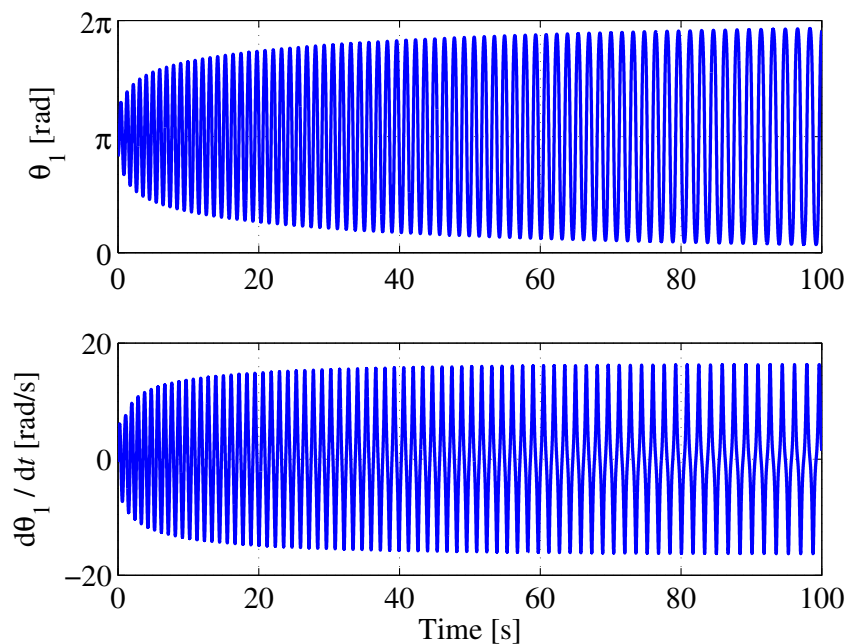
$$\begin{cases} k_E = 1 \\ k_\omega = 1/480 \\ k_\delta = 1/480 \\ k_\theta = 1/480 \end{cases} \quad (3.55)$$

は同じ制御器を作り出すといえる．(3.54) 式の

$$\frac{k_\omega}{k_E} = \frac{1}{480} = 2.08 \times 10^{-3} \quad (3.56)$$

は，Fantoni ら [6] の十分条件から得られた (3.51) 式に反し，本論文の必要十分条件 (3.52) にも反している．

これは (3.54) 式のパラメータでの制御器 (3.13) は特異点を含んでいることを示す．特異点を含んでいることで，特異点に入る (制御入力トルクが無限大になる) 可能性はあるが，初期条件 (3.53) から開始するシミュレーション結果 ( $0 \leq t \leq 100$  s)

Fig. 3.2 Time responses of  $\theta_1$  and  $\dot{\theta}_1$  in [6].

では, Fig. 3.2 に  $\theta_1$  と  $\dot{\theta}_1$  の時間応答を示すように, 回転型振子は (3.13) 式の特異点に入らず, ゆっくりと真上平衡点へ近づくように振り上がった.

本論文では, 特異点を回避する必要十分条件 (3.52) を満たすように, 以下の制御パラメータを選ぶ.

$$\begin{cases} k_E = 1 \\ k_\omega = 2.30 \times 10^{-3} \\ k_\delta = 6.70 \times 10^{-3} \\ k_\theta = 6.53 \times 10^{-2} \end{cases} \quad (3.57)$$

ここで注意すべきことは, (3.57) 式の  $k_\omega/k_E$  は Fantoni ら [6] の十分条件 (3.51) を満足していないことである. そのうえ, Fantoni ら [6] の提案した制約条件 (3.47) は,

$$V(0) < 2k_E b_0^2 = 7.10 \times 10^{-3} \quad (3.58)$$

であるが, 本研究での制御パラメータは,

$$2k_E b_0^2 = 8.67 \times 10^{-2} \quad (3.59)$$

により, (3.47) 式の制約条件を満足していない.



比較のため, (3.55) 式と (3.57) 式のパラメータに対するシミュレーション結果 ( $0 \leq t \leq 10$  s) を Fig. 3.3–3.6 に示す (実線: 本論文の結果, 点線: Fantoni ら [6] の結果).

Fig. 3.3 は, リアプノフ関数  $V$  が非増加で 0 に収束し, システムの総エネルギー  $E$  は 0 に収束していることを示している. Fig. 3.4 より, アームの角度  $\theta_0$  とアームの角速度  $\dot{\theta}_0$  が, それぞれ 0 へ収束していることが分かる. Fig. 3.5 は, (3.57) 式のパラメータの下で, 振子は振り上がり, (3.55) 式のパラメータよりも, 真上平衡点近傍へ素早く近づいているを示している. また, 振子が真上平衡点近傍まで振り上がったときに, 振子の角速度が十分小さく, 真上平衡点で振子を安定化させるために安定化制御器へ切り替えることができることがわかる.

Fig. 3.6 に示した  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  の位相図と制御入力トルク  $\tau$  の時間応答から,  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  は (3.28) 式の  $\Omega_r$  で記述されるホモクリニク軌道に収束し,  $\tau$  は 0 に収束していることがわかる.

以上のことから, 本論文のシミュレーション結果は, 制御パラメータの改善された条件の下で, 振り上げ制御目標が素早く達成されていることが確認できる.

## 数値シミュレーション 2

数値シミュレーション 1 からシステムの初期条件を変更した場合について, 数値シミュレーションを実施する. 初期条件は, 以下の真下平衡点に近い状態 (3.60) とする. なお, 機械パラメータと制御パラメータは, 数値シミュレーション 1 と同じ値とする.

$$\begin{cases} \theta_0(0) = 0.1 \text{ rad} \\ \theta_1(0) = \pi - 0.1 \text{ rad} \\ \dot{\theta}_0(0) = 0 \text{ rad/s} \\ \dot{\theta}_1(0) = 0 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (3.60)$$

Fantoni ら [6] の提案した (3.54) 式のパラメータでの制御則 (3.13) は, 特異点を含んでいる. そのため, (3.60) 式の初期値に対して, シミュレーションを実行すると, 制御入力  $\tau$  の時間応答は, Fig. 3.7 で示す結果 ( $0 \leq t \leq 0.05$  s) となり, 特異点により, 非常に大きな値に達していることが確認できる.

これは, 制御パラメータの  $k_\omega/k_E$  の値が, 制御則に特異点を含まないための, Fantoni ら [6] の十分条件, 本論文の必要十分条件のいずれも満足していないためである.

つぎに、本論文で示した必要十分条件から得られた、数値シミュレーション 1 と同じ制御パラメータ (3.57) を用いて、シミュレーションを実行し、Fig. 3.3–3.6 にその結果を示す (実線: 本論文の結果).

Fig. 3.8 は、リアプノフ関数  $V$  が非増加で 0 に収束し、システムの総エネルギー  $E$  は 0 に収束していることを示している. Fig. 3.9 より、アームの角度  $\theta_0$  とアームの角速度  $\dot{\theta}_0$  が、それぞれ 0 へ収束していることが分かる. Fig. 3.10 は、(3.57) 式の制御パラメータの下で、徐々に真上平衡点へ近づくように振り上がっていることが確認できる. Fig. 3.11 に示した  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  の位相図から、 $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  は (3.28) 式の  $\Omega_r$  で記述されるホモクリニック軌道に収束していることがわかる. また、制御入力トルク  $\tau$  の時間応答より、Fantoni ら [6] の結果 (Fig. 3.7) の様に、トルクの大きな変化はなく、ほとんどの時間帯で、 $\pm 0.3\text{Nm}$  程度に収まっていることが確認できる.

## 3.7 結言

本章では、回転型振子システムの総エネルギーに着目したエネルギー制御法による振り上げ制御問題を扱った. まず、制御則の特異点を回避するための既存の十分条件に対して、その必要十分条件を新たに提示した. つぎに、振子の大域定常動きの解析を行い、真下平衡点がサドル型平衡点であることを関連付けることにより、従来研究において仮定されていた、振子が真下平衡点に留まるのを防ぐための初期条件と制御パラメータの制約を取り除いた. さらに、数値シミュレーションによって、理論解析の結果の有効性を示した.

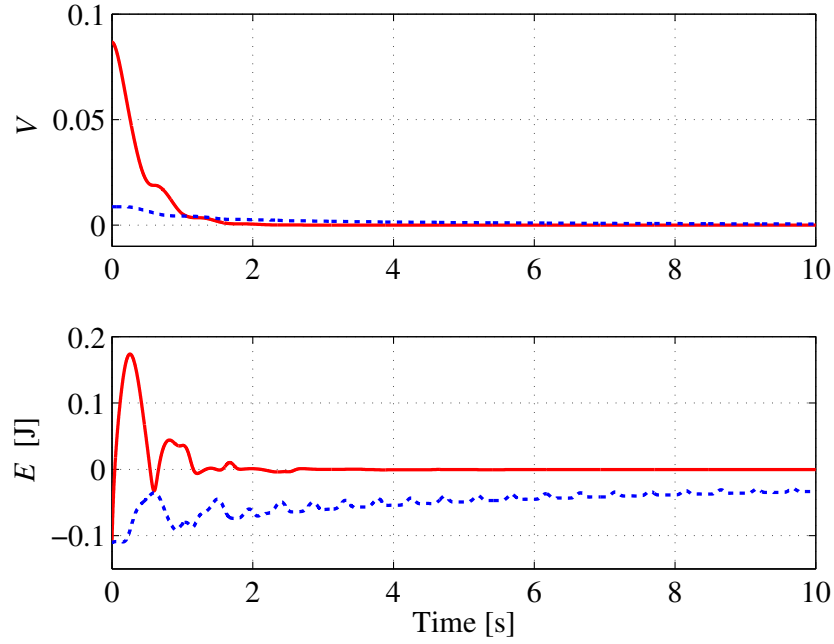


Fig. 3.3 Time responses of  $V$  and  $E$ . (solid lines: our results, dotted lines: the results of [6])

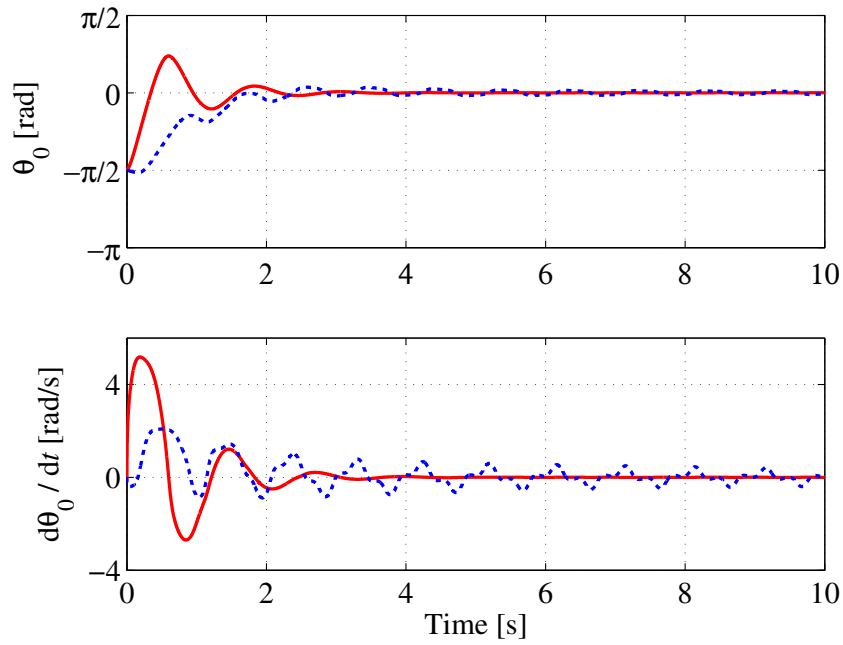


Fig. 3.4 Time responses of  $\theta_0$  and  $\dot{\theta}_0$ . (solid lines: our results, dotted lines: the results of [6])

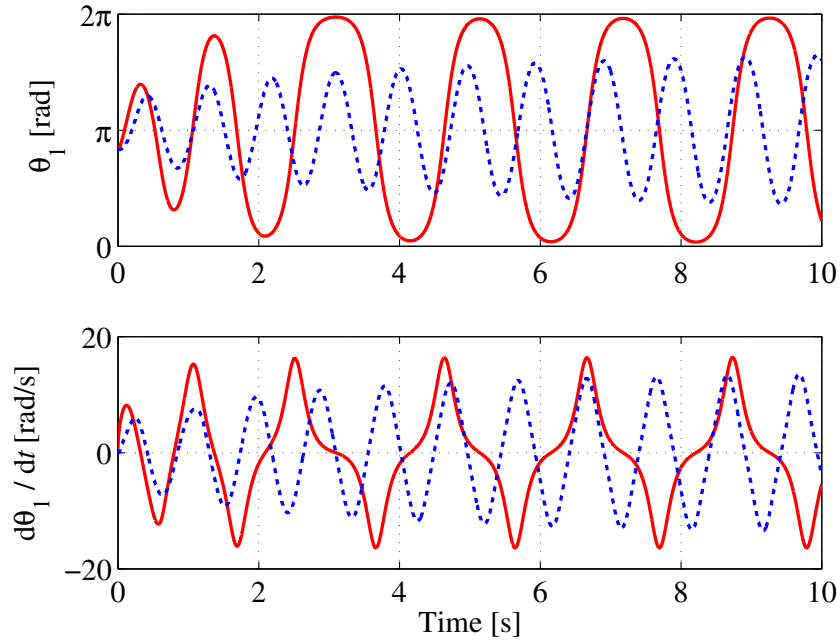


Fig. 3.5 Time responses of  $\theta_1$  and  $\dot{\theta}_1$ . (solid lines: our results, dotted lines: the results of [6])

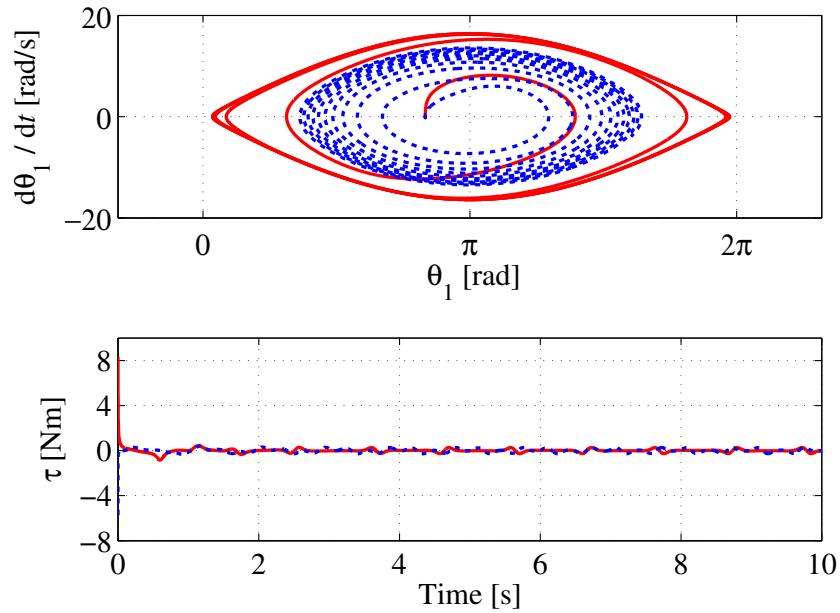
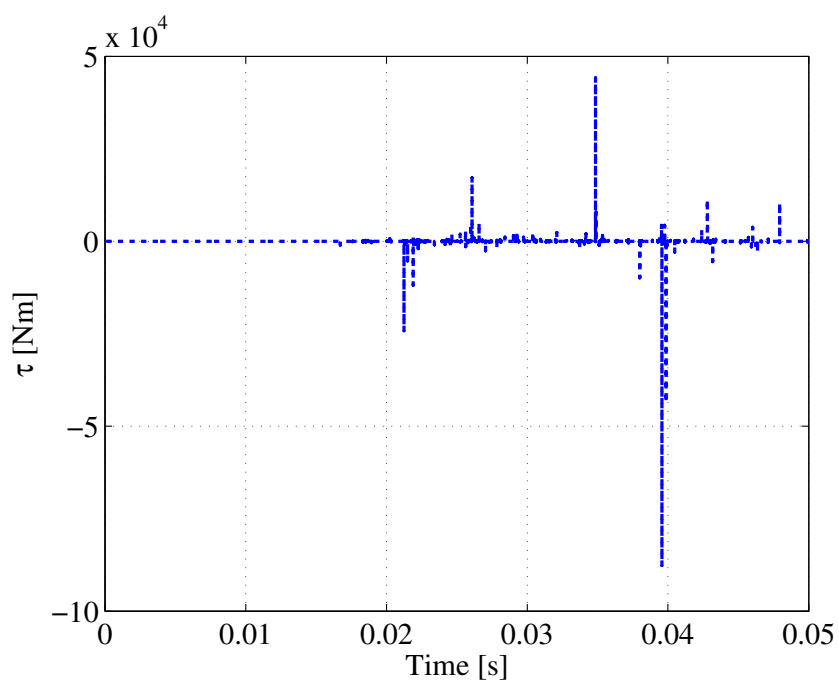
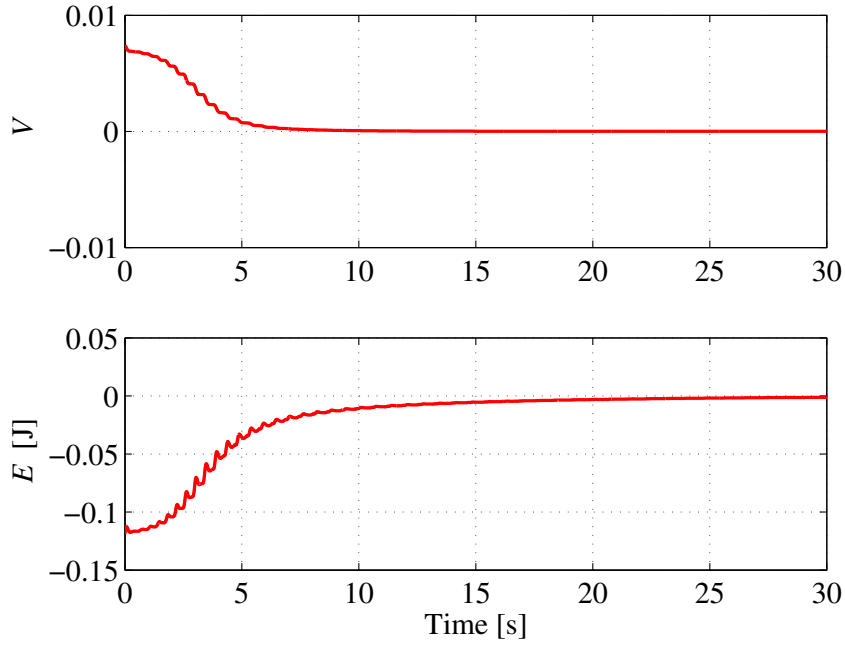
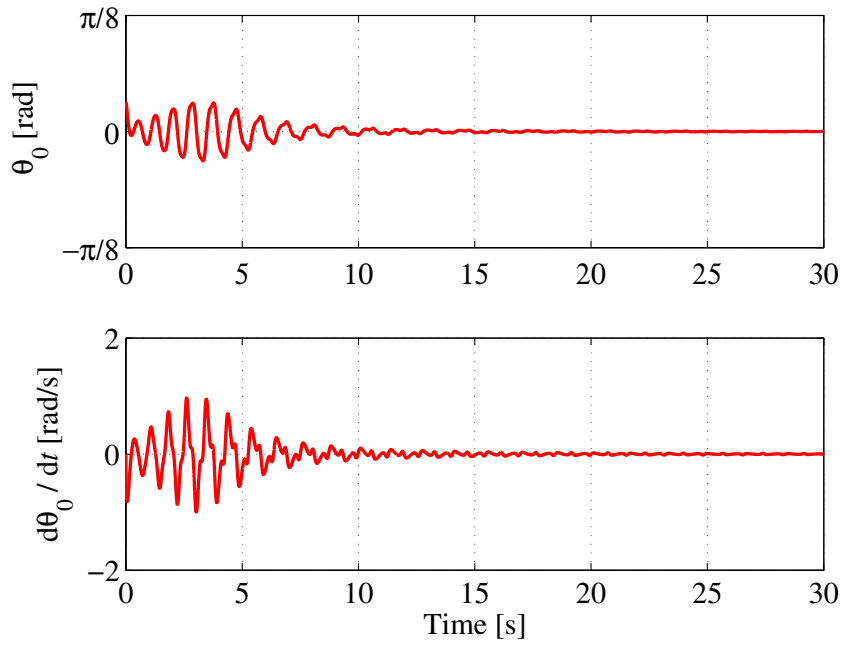
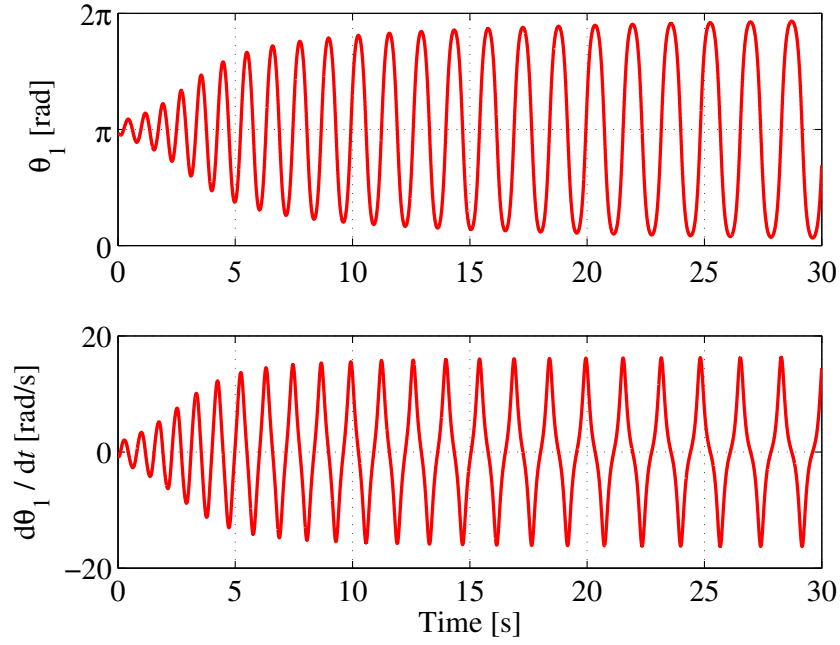
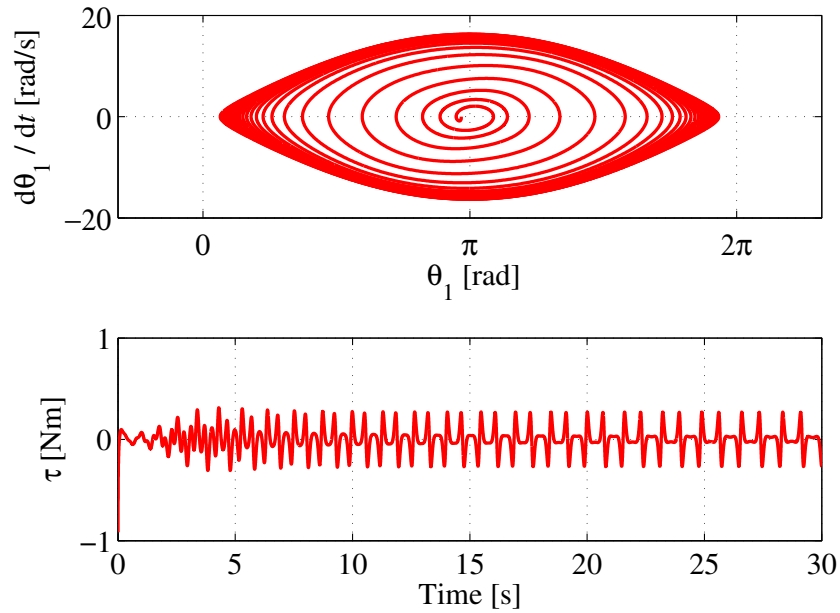


Fig. 3.6 Phase portrait of  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  and time response of  $\tau$ . (solid lines: our results, dotted lines: the results of [6])

Fig. 3.7 Time responses of  $\tau$ . (the results of [6])

Fig. 3.8 Time responses of  $V$  and  $E$ . (our results)Fig. 3.9 Time responses of  $\theta_0$  and  $\dot{\theta}_0$ . (our results)

Fig. 3.10 Time responses of  $\theta_1$  and  $\dot{\theta}_1$ . (our results)Fig. 3.11 Phase portrait of  $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  and time response of  $\tau$ . (our results)

## 第4章 実機検証

### 4.1 緒言

本章では，エネルギー制御法によって設計した回転型振子の振り上げ制御則の有効性を実機を用いて検証する．これまで理論結果の有効性は，数値シミュレーションでは検証されていたが，実機による検証結果の報告は，本論文がはじめてである．本論文では，Quanser Consulting Inc.[14] で開発された実験システムを使用して，エネルギー制御法の有効性を示すとともに，システムの開発元によって提供されている振り上げ制御則のサンプルを，本論文の制御則と比較する．

### 4.2 振り上げ制御則の設計と解析

理論検証で用いた回転型振子のモデルは，振子が上向きの状態から測定された振子の角度を  $\theta_1$  を用いたが，実験システム [14] は，Fig. 2.2 で示すように，振子が下向きの状態から測定された角度  $\alpha$  を用いる．

まず，(2.30) 式の関係を用いて，制御器設計，および特異点回避条件について再考する．回転型振子に対する振り上げ制御器は，真上平衡点  $(\theta_0, \alpha, \dot{\theta}_0, \dot{\alpha}) = (0, \pi, 0, 0)$  まで振子を振り上げることが目的であり，振子は安定化制御器によって，その点で平衡を保つことができる．つまり，振り上げ制御器の目標は以下の様な  $\tau$  を設計することである．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_e(\theta, \dot{\theta}) = E_r, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_0 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_0 = 0 \quad (4.1)$$

$E_r = 2b_0$  は真上平衡点でのシステムの総エネルギーである．Fantoni ら [6] のエネルギー制御法に基づく振り上げ制御器は次式で表される．

$$\tau = \frac{k_\omega W^T D_e^{-1} (H_e + G_e) - k_\theta \theta_0 - k_\delta \dot{\theta}_0}{\Lambda} \quad (4.2)$$

ここで，

$$\Lambda(\theta, \dot{\theta}) = k_E (E_e - E_r)(\theta, \dot{\theta}) + k_\omega W^T D_e^{-1}(\theta) W \quad (4.3)$$



であり,  $k_E > 0, k_\omega > 0, k_\theta > 0$  は制御パラメータである.

$\tau$  が  $(\theta, \dot{\theta})$  に対して特異点をもたないための必要十分条件は, 次式を満たすことである.

$$\frac{k_\omega}{k_E} > \max_{\theta} f(\theta) \quad \text{with } f(\theta) = \frac{E_r - P_e(\theta)}{W^T D_e^{-1}(\theta) W} \quad (4.4)$$

(4.4) 式の右边を計算することにより, (4.5) 式を得る.

$$\frac{k_\omega}{k_E} > \frac{b_0}{a_1} \max_{\alpha} \{(1 + \cos \alpha) \det(D)\} \quad (4.5)$$

以下に補題をまとめる.

**補題 3** (2.24) 式と正のパラメータ  $k_E, k_\omega, k_\theta, k_\delta$  の制御則 (4.2) から成る閉ループシステムにおいて, 任意の  $(\theta, \dot{\theta})$  に対し, 制御則 (4.2) に特異点が存在しないための必要十分条件は  $k_\omega$  と  $k_E$  が (4.5) 式を満たすことである. このとき, 次式が成立する.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\theta, \dot{\theta}) = E^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_0 = \theta_0^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_0 = 0 \quad (4.6)$$

ここで,  $E^*$  と  $\theta_0^*$  は定数である. さらに,  $t \rightarrow \infty$  のとき閉ループ解  $(\theta, \dot{\theta})$  は以下の不変集合  $\Omega$  に収束する.

$$\Omega = \left\{ (\theta, \dot{\theta}) \left| \theta_0 \equiv \theta_0^*, \quad \dot{\alpha}^2 \equiv \frac{2E^* - 2b_0(1 - \cos \alpha)}{a_1} \right. \right\} \quad (4.7)$$

振子がエネルギーに基づく制御則 (4.2) の下で, 振り上がるかどうかを検証するために, 文献 [15] において, エネルギーの値の収束性と振子の動きを関連付け, 真下平衡点の安定性を解析した. 主な解析結果を以下の定理に示す.

**定理 2** (2.24) 式と正のパラメータ  $k_E, k_\omega, k_\theta, k_\delta$  の制御則 (4.2) から成る閉ループシステムにおいて,  $k_E$  と  $k_\omega$  は (4.5) 式を満たすと仮定すると, 以下の内容が成立する.

- 1 閉ループシステムの解  $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$  は  $t \rightarrow \infty$  で不変集合  $\Omega$  に収束する.

$$\Omega = \Omega_r \cup \{(0, \pi, 0, 0)\} \quad (4.8)$$

ここで

$$\Omega_r = \left\{ (\theta, \dot{\theta}) \left| \theta_0 \equiv 0, \quad \dot{\alpha}^2 \equiv \frac{2b_0(1 + \cos \alpha)}{a_1} \right. \right\} \quad (4.9)$$

- 2 閉ループシステムに対して, 真下平衡点  $(\theta_0, \alpha, \dot{\theta}_0, \dot{\alpha}) = (0, 0, 0, 0)$  におけるヤコビ行列は開左半平面, 及び右半平面にそれぞれ二つの固有値を有する. その平衡点はサドル型平衡点である.

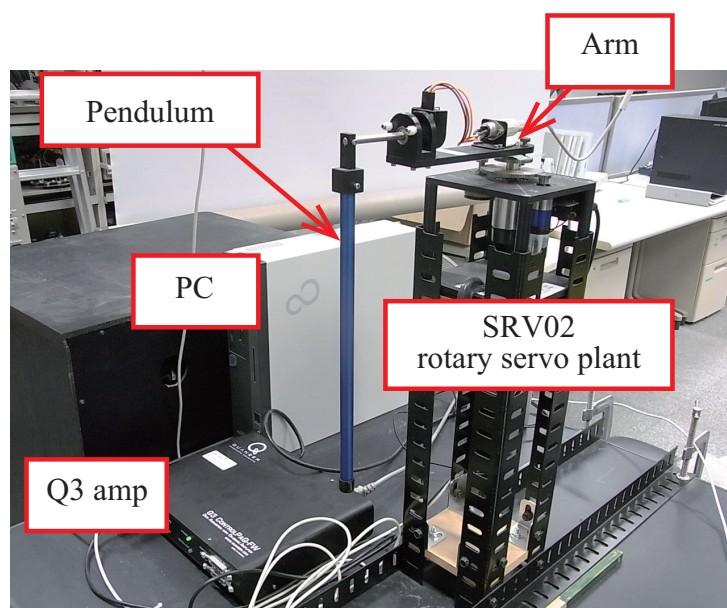


Fig. 4.1 View of the experiment system.

### 4.3 実機構成

この節では、実機構成について述べる．まず、Fig. 4.1 に実機システムの外観を示す．

SRV02 回転型運動装置は、DC サーボモータを搭載した汎用型の制御実験装置であり、アンプや PC (システム開発ソフトウェア) などの周辺機器を接続することにより、モータ制御関連の様々な実験を行うことができる装置である．本実験のように回転型振子の実験としてだけでなく、アームや振子の部分にその他のモジュール (例えばフレキシブルなアーム、二重倒立振子など) を取り付けることにより、他の実験へも拡張可能である．また、ギア比の構成や重りを変えることで、負荷変化に対する性能も評価できる特徴をもつ．

本実験装置は、アーム、および振子の各モジュールを取り付けた“SRV02 回転型運動装置”、“Q3 アンプ (制御基板とアンプユニット)”，システム開発環境として Mathworks 社の“MATLAB/Simulink”がインストールされた PC から構成される．

システム構成の詳細を Fig. 4.2 に示し、図中の数字に対応する各名称を Table 4.1 に記述する．また、SRV02 の主要なパラメータを Table 4.2 に示す．

実験システムの駆動原理について、概要をまとめる．モータは、14 : 1 のギアをドライブし、それが外部ギアをドライブする．モータギアは、ボールベアリングブロック内で回転する独立した出力シャフトに接続してあるギアをドライブする．出力シャフトにはエンコーダが搭載されており、出力シャフトのセカンドギアは、

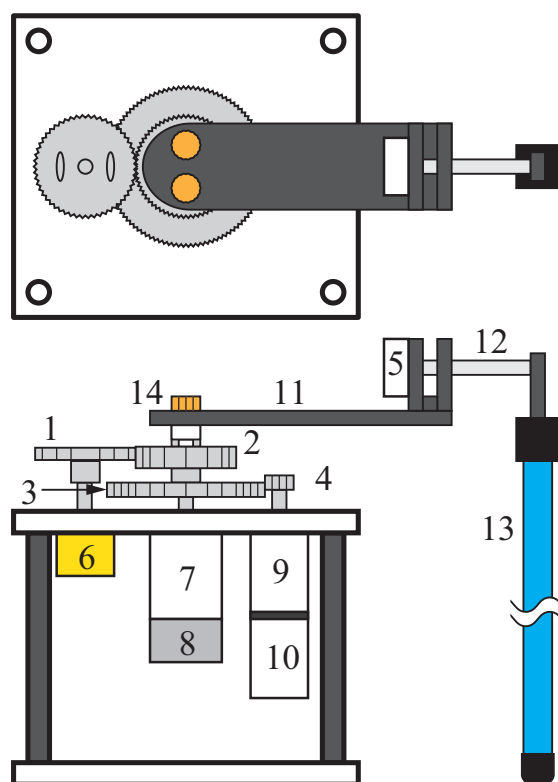


Fig. 4.2 Detail view of the SRV02.

ポテンシオメータを搭載したアンチバックラッシュギアをドライブする。アーム、および振子の角度は、それぞれエンコーダによって測定される。

制御システムの構築は，Matlab/Simulink の環境を使用し，Fig. 4.3 に示すようなブロック図を用いる．実験装置は，大きく分けると以下のブロックで構成されている．

- “Control” ブロック
- “SRV-02” ブロック
- “High-Gain Observer” ブロック

また、実験中のシステムの状態の確認、および記録のため、PC モニタへの表示機能、ファイルへのデータ出力の機能も、組み込んでいる。各ブロックの概要を以下に示す。

“Control” ブロックの内部は、Fig. 4.4に示すような構成をしている．このブロックには、3章で理論検証を行った、エネルギー制御法による振り上げ制御器、および振子が真上平衡点近傍に近づいたとき、安定化制御に切り替える場合に使用する安定化制御器が含まれている．また、実験の目的により、振り上げ制御のみ行

Table 4.1 Component name

No.	Description
1	Potentiometer anti-backlash gear
2	Output gear
3	Load gear (120 teeth)
4	Motor gear (24 teeth)
5	Encoder
6	Potentiometer
7	Bearing block
8	Pendulum sensor (encoder)
9	Gear box
10	Motor
11	Coupling arm
12	Sensor shaft
13	Pendulum
14	Thumbscrews

Table 4.2 System parameters

Symbol or Name	Value	Units
$L_0$	0.2159	m
$l_1$	0.1556	m
$m_1$	0.1270	kg
$I_0$	$2.000 \times 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$J_1$	$1.200 \times 10^{-2}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Motor torque constant	$7.670 \times 10^{-3}$	N·m
Back EMF constant	$7.670 \times 10^{-3}$	V/(rd/s)
Armature resistance	2.600	$\Omega$
Encoder resolution	4096	Counts/rev.

う場合と、振り上げ・安定化制御を行う場合があるため、“balance ON/OFF”にて、安定化制御器動作の ON/OFF を切り替える。

“Control” ブロック内部の “Swing-Up Control” ブロックの構成は、Fig. 4.5 で記述される。振り上げ制御器への入力信号は、アームおよび振子の角度と速度  $(\theta_0, \alpha, \dot{\theta}_0, \dot{\alpha})$  である。アーム、および振子の速度  $\dot{\theta}_0, \dot{\alpha}$  は、それぞれエンコーダで測定された角度  $\theta_0, \alpha$  から、“High-Gain Observer” ブロック (Fig. 4.6) で、推定した値である。“Swing-Up Control” ブロック内の各ブロックによって計算された値が “Sub-Tau” ブロックに入り、最終的な制御器の出力  $\tau$  として計算される。

“SRV-02” ブロックの内部は、Fig. 4.7 で示すように、実験システムの環境が記述される。入力された制御器の出力  $\tau$  は、そのトルクに応じたモータ入力電流に換算している。

## 4.4 振り上げ制御

実機を想定した数値シミュレーションと実験におけるシステムの初期状態は以下のとおり、振子が真下平衡点の状態とする。

$$\begin{cases} \theta_0(0) = 0 \text{ rad} \\ \alpha(0) = 0 \text{ rad} \\ \dot{\theta}_0(0) = 0 \text{ rad/s} \\ \dot{\alpha}(0) = 0 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (4.10)$$

この初期条件は閉ループシステムの平衡点であるため、まず、0.2 s の間、0.2 Nm のステップ入力を用いることで振子に摂動を与える。

制御則 (4.2) の特異点を回避するため、必要十分条件 (4.5) より、 $k_\omega/k_E > 0.0014$  を得る。振子を素早く真上平衡点へ近づくように振り上げるために、以下の制御パラメータを選択する。

$$\begin{cases} k_E = 1 \\ k_\omega = 2.800 \times 10^{-3} \\ k_\delta = 1.000 \times 10^{-2} \\ k_\theta = 2.000 \times 10^{-1} \end{cases} \quad (4.11)$$

Fig. 4.8 に振り上げ制御のシミュレーション結果を示す。アームの角度  $\theta_0$  は 0 に近づき、振子は数回のスイングの後、真上平衡点  $\alpha = \pm\pi$  に近づいていることが分かる。 $(\alpha, \dot{\alpha})$  の位相図より、 $(\alpha, \dot{\alpha})$  は (4.9) 式の  $\Omega_r$  で記述されるホモクリニッ

ク軌道に収束しており，振子が直立位置に近づいたときに，局所安定化制御器に切り替えることで，振子を真上平衡点で安定化することができる．

振り上げ制御の実験結果を Fig. 4.9 に示す．アームの角度  $\theta_0$  は 0 に近づき，振子は数回のスイングの後，真上平衡点  $\alpha = \pm\pi$  に近づいていることが分かる．実験結果は，特に振り上げの初期段階において，対応するシミュレーション結果とある程度一致している．シミュレーションにおいて，振子が真上平衡点にスイングして近づくのに対し，実験では直立位置を横切り，回転しながら真上平衡点に近づいている．振子が真上平衡点近傍に達したとき，Fig. 4.9 の位相図から，振子の角速度は十分小さいため，シミュレーション結果と同様，振子が直立位置に近づいたときに，局所安定化制御器に切り替えることで，振子を真上平衡点で安定化することができる．したがって，実機においても，制御目標を達成し，振り上げ制御則の有効性を示すことができた．

## 4.5 振り上げ・安定化制御

振り上げ・安定化制御では，振子が真上平衡点へ近づいたとき，振り上げ制御器から局所安定化制御器に切り替える．Quanser Consulting Inc. (実験システムの開発元) [14] より提供された，以下の安定化制御器を採用する．

$$\tau = F \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \alpha_{up} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

ここで  $F$  は状態フィードバックゲインであり， $\alpha_{up}$  は次式で表される．

$$\alpha_{up} = \alpha \pmod{2\pi} - \pi \quad (4.13)$$

なお，(4.13) 式の  $\alpha \pmod{2\pi}$  は  $[0, 2\pi)$  の値をとる．

(4.12) 式の安定化状態フィードバックゲイン  $F$  に関して，Quanser Consulting Inc. [14] のサンプルプログラムと同じ以下の値を用いる．

$$F = [-0.3055, 1.882, -0.1454, 0.2579] \quad (4.14)$$

実際に， $F$  は (4.2) の機械パラメータと MATLAB 関数 “lqr” により計算される．なお，重み付け行列は以下のとおりである．

$$Q = \text{diag}\{0.4, 0.4, 0, 0\}, \quad R = 15$$

振り上げ制御器から安定化制御器への切り替え条件は、以下の切り替え条件を適用する.

$$0.50|\theta_0| + |\alpha_{up}| + 0.01|\dot{\theta}_0| + 0.01|\dot{\alpha}| < 0.30. \quad (4.15)$$

この条件は、アーム、および振子のそれぞれの角速度、角度の数値の和が、ある値(ここでは0.30)より小さいとき、つまり、アームの角度は目標値に、振子は真上位置に十分小さい角速度で近づいたと見なすことができるときに、安定化制御器に切り替えることを示している.

振り上げ・安定化制御のシミュレーション結果を Fig. 4.10 に示す. 安定化制御器への切り替えは、約 3.5 s で実行され、安定化制御器により、振子は、真上平衡点  $\alpha = -\pi$  で安定化していることがわかる. シミュレーションに対応する実験結果を Fig. 4.11 に示す. 安定化制御器への切り替えは、約 4.1 s で実行され、安定化制御器により、振子は、真上平衡点  $\alpha = -\pi$  で安定化している.

実験結果は、摩擦のモデル化されない動特性、機械パラメータの不確かさにもかかわらず、ある程度シミュレーション結果と一致し、特に振り上げ制御の初期段階で一致している. また、振り上げ制御器が振子を素早く真上平衡点に近づくように振り上げ、アームは目標値へ収束したを示した. 振り上げ後、安定化制御器への切り替えは成功し、振子とアームは目標値で安定化されたことが確認できた.

## 4.6 議論

Quanser Consulting Inc. [14] で提案され、サンプルとして提供されているエネルギー制御法による振り上げ制御則についての解説と本論文で扱った振り上げ制御則との比較を行う.

振り上げ制御則 [14] を説明するために、まず以下の  $E_s$  を定義する.

$$E_s(\alpha, \dot{\alpha}) = E(\theta, \dot{\theta})|_{\dot{\theta}_0=0} = \frac{J_1 \dot{\alpha}^2}{2} + P(\theta) \quad (4.16)$$

この  $E_s(\alpha, \dot{\alpha})$  は、システムの総エネルギー  $E(\theta, \dot{\theta})$  の一部であり、振子のみに着目したエネルギーである. 制御目的は、以下のような  $\tau$  を設計することである.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_s(\alpha, \dot{\alpha}) = E_r \quad (4.17)$$

制御則 [14] は次式で表され、文献 [2] で提案された制御方式に基づいた制御則である.

$$\tau_s = m_0 l_0 g (E_s - E_r) (\cos(\alpha) \dot{\alpha}) \quad (4.18)$$

ここで  $m_0$  はアームの質量,  $l_0$  はアームの回転軸から重心までの距離である.

Quanser Consulting Inc. [14] は, (4.18) 式の制御則に対して理論解析を行っているが, 実験で用いられている制御則 (サンプルプログラム) は, 振子を素早く振り上げることを目的とし, 次式に置き換えている.

$$\tau_s = m_0 l_0 g \text{sat}_{u_{\max}} \{ \mu (E_s - E_r) \text{Sign}(\cos(\alpha) \dot{\alpha}_{up}) \} \quad (4.19)$$

ここで  $u_{\max}$  は最大加速度,  $\mu$  はチューニングゲイン,  $\text{sat}(\cdot)$  は次式で定義される飽和関数である.

$$\text{sat}_a(y) = \begin{cases} a, & y > a \\ y, & |y| \leq a \\ -a, & y < -a \end{cases} \quad (4.20)$$

そして,  $\text{Sign}(\cdot)$  は次式で表される符号関数である.

$$\text{Sign}(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

サンプルプログラムの制御パラメータは次のとおりである.

$$\begin{cases} m_0 = 2.570 \times 10^{-1} \text{ kg} \\ l_0 = 6.190 \times 10^{-2} \text{ m} \\ u_{\max} = 27.46 \text{ m/s}^2 \\ \mu = 2.857 \times 10^{-1} \text{ g/J} \end{cases} \quad (4.22)$$

振り上げ制御則 (4.19) から安定化制御器 (4.12) への切り替え条件は次式である. 振り上げの段階においてアームは制御されていないため, 振子に関する条件のみで構成されている. この条件では, アームの角度, 角速度が目標値から大きく離れているときに, 安定化制御器への切り替えが行われた場合, 振子を安定化できない可能性があることを指摘しておく.

$$|\alpha_{up}| \leq 2.50\pi/180 \text{ rad} \quad \text{and} \quad |\dot{\alpha}| \leq 16.1 \text{ rad/s}. \quad (4.23)$$

振り上げ制御則 (4.19) と安定化制御器 (4.12) を用いた実験結果を Fig. 4.12 に示す. 振子は真上平衡点近傍までに振り上がり, 約 5.6s で安定化制御器に切り替わっている. 制御入力  $\tau$  は, 制御則に含まれる  $\text{Sign}$  関数の影響で, スパイク状の信号になっている.



Fig. 4.9 と Fig. 4.12 におけるアームと振子の時間応答を比較すると、本論文の制御則 (4.2) の結果は Quanser Consulting Inc.[14] の制御則 (4.19) よりも、振子が素早く振り上がり、また制御トルクも小さく抑えられていることから、よりよい振り上げ制御が達成されていることが確認できる。

## 4.7 結言

本章では、Quanser Consulting Inc.[14] で開発された実験システムを用いて、エネルギー制御法による振り上げ制御則の有効性を理論と実験の両方で示した。また、振り上げ・安定化制御では、安定化制御器への切り替えに成功し、振子とアームは目標値で安定化したことを示した。さらに、システムの開発元から提供されている振り上げ制御則と本研究の制御則を比較し、本研究で用いている制御則の方が優れていることを示した。

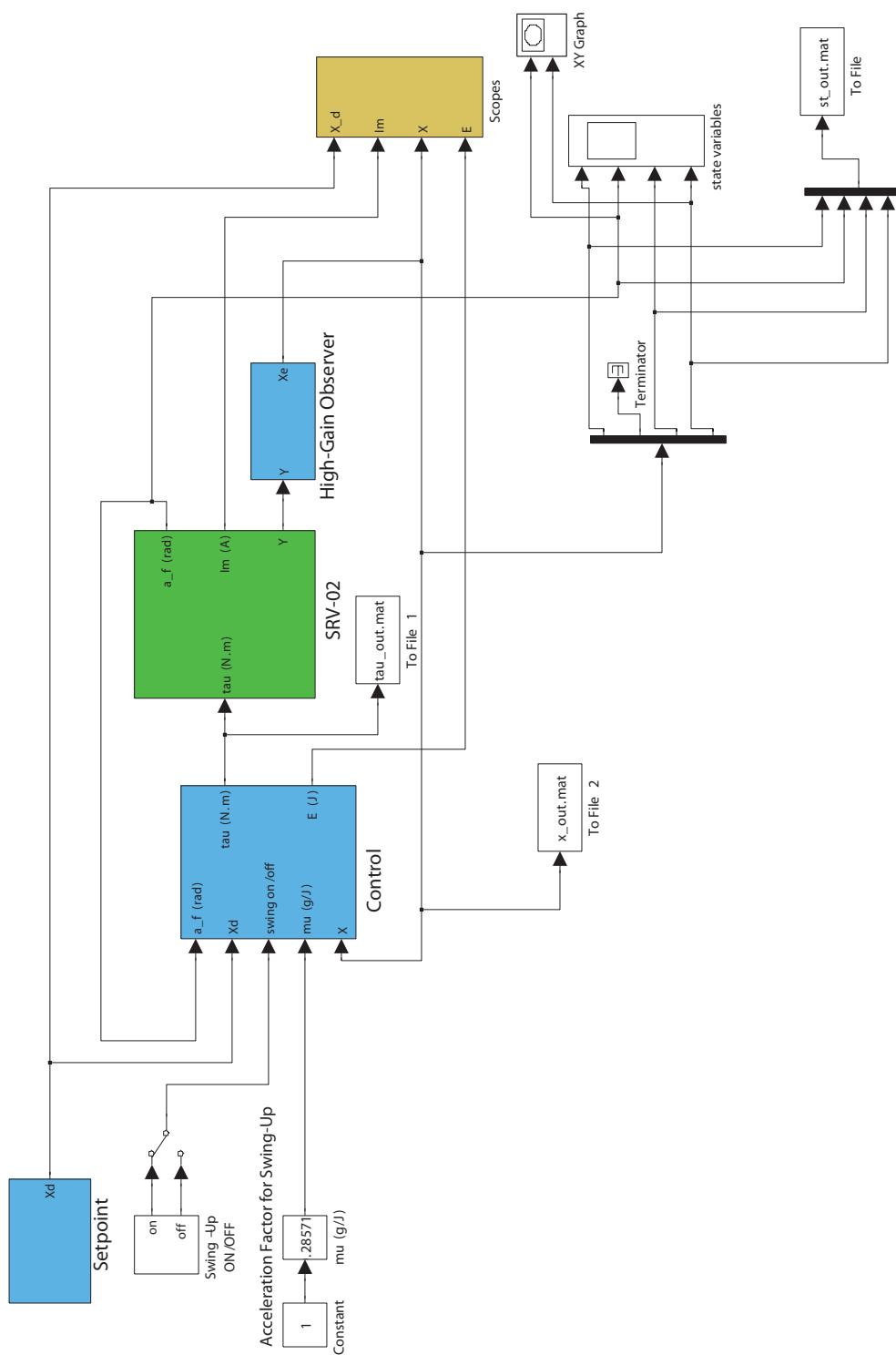


Fig. 4.3 Block diagram of experimental system [14].

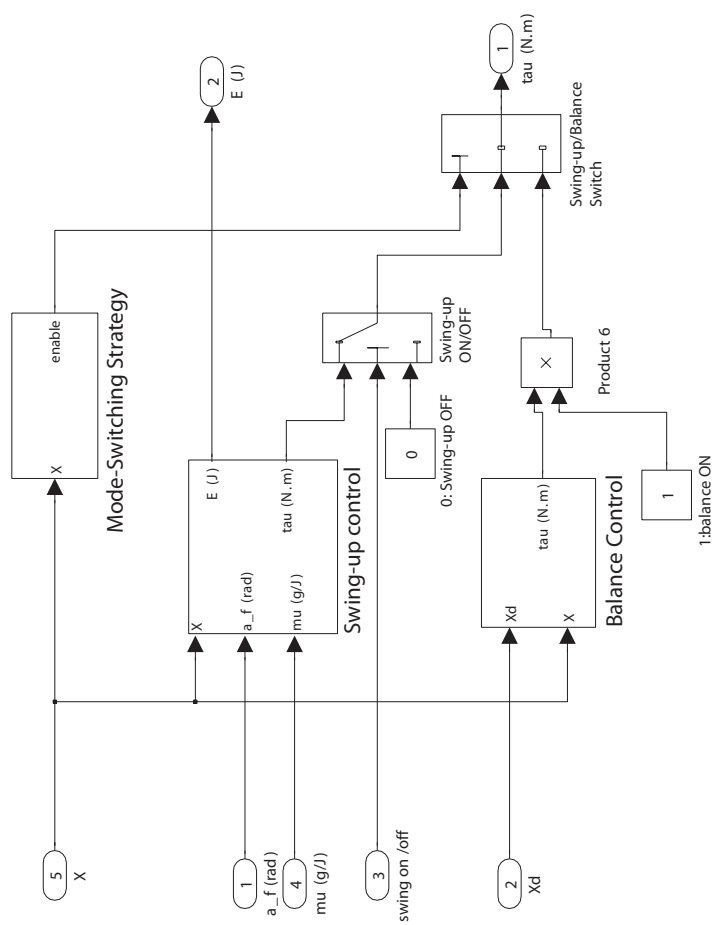


Fig. 4.4 Block diagram of controller [14].

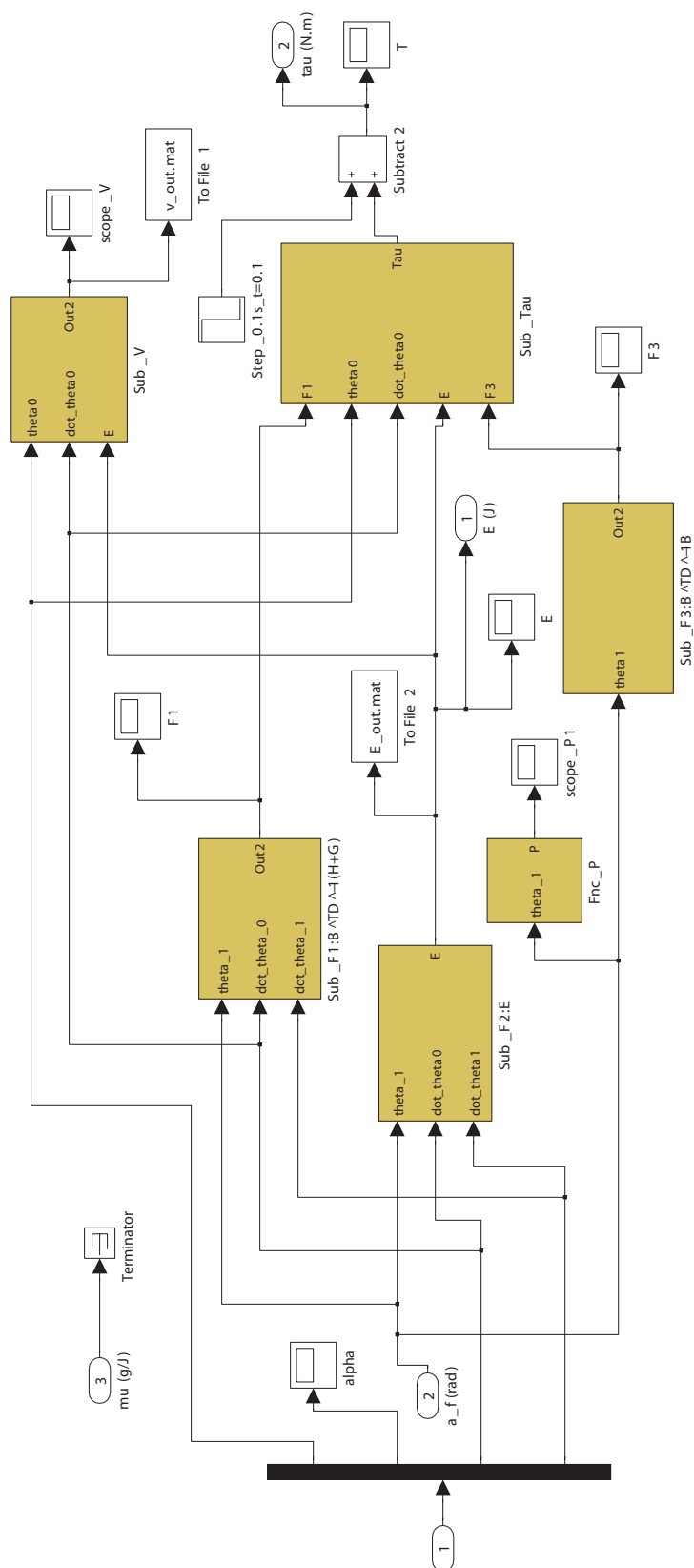


Fig. 4.5 Block diagram of swing-up control (4.2).

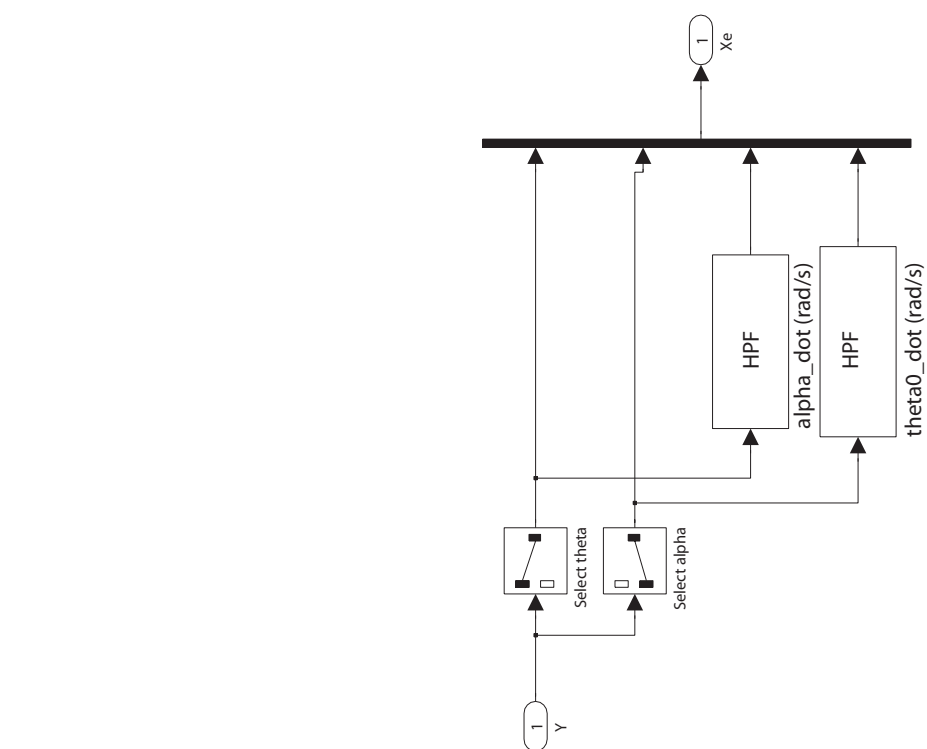


Fig. 4.6 Block diagram of high-gain observer [14].

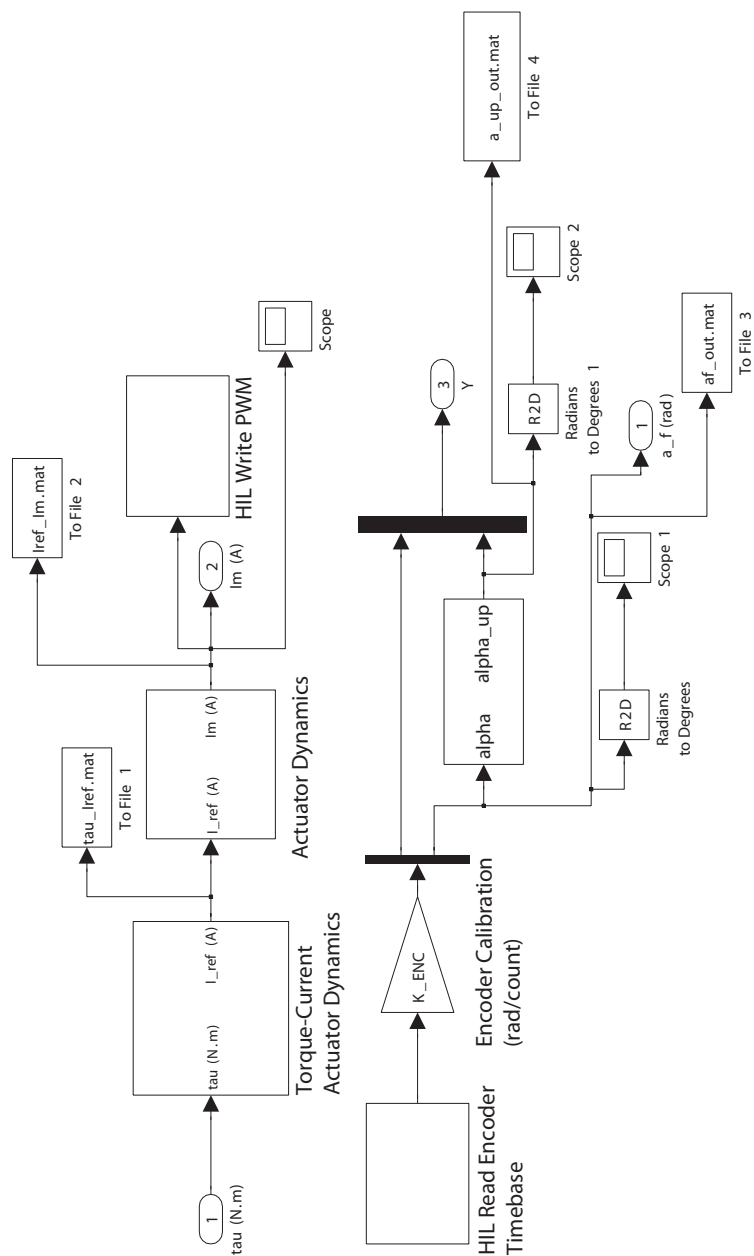


Fig. 4.7 Block diagram of plant [14].

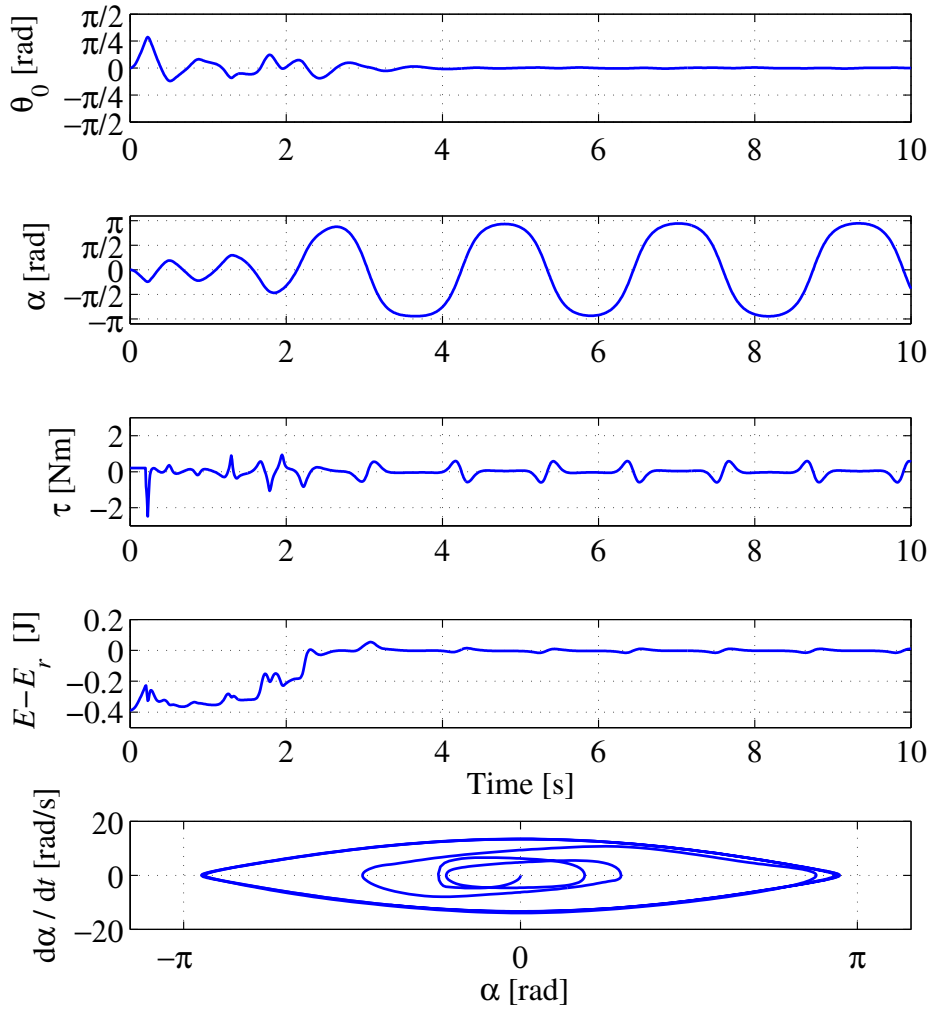


Fig. 4.8 Simulation results of time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $E - E_r$  and phase portrait of  $(\alpha, \dot{\alpha})$  under a perturbation and the swing-up controller (4.2).

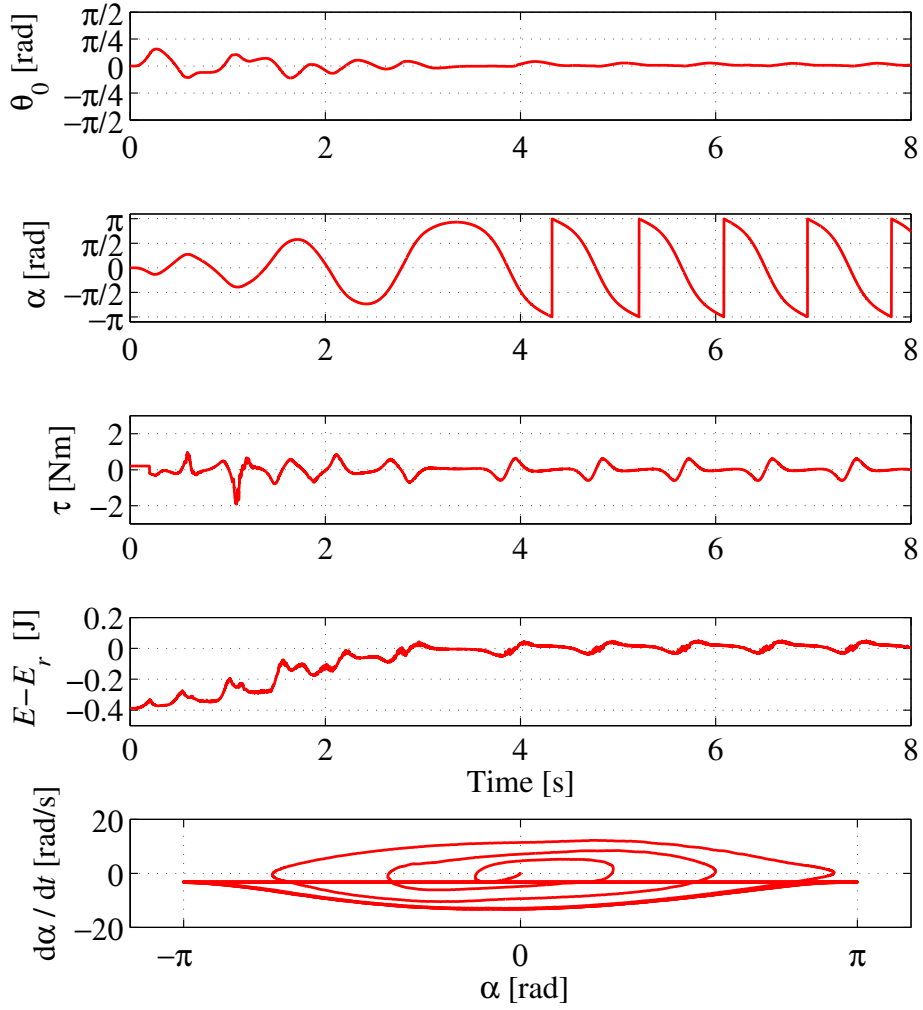


Fig. 4.9 Experimental results of time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $E - E_r$  and phase portrait of  $(\alpha, \dot{\alpha})$  under a perturbation and the swing-up controller (4.2).



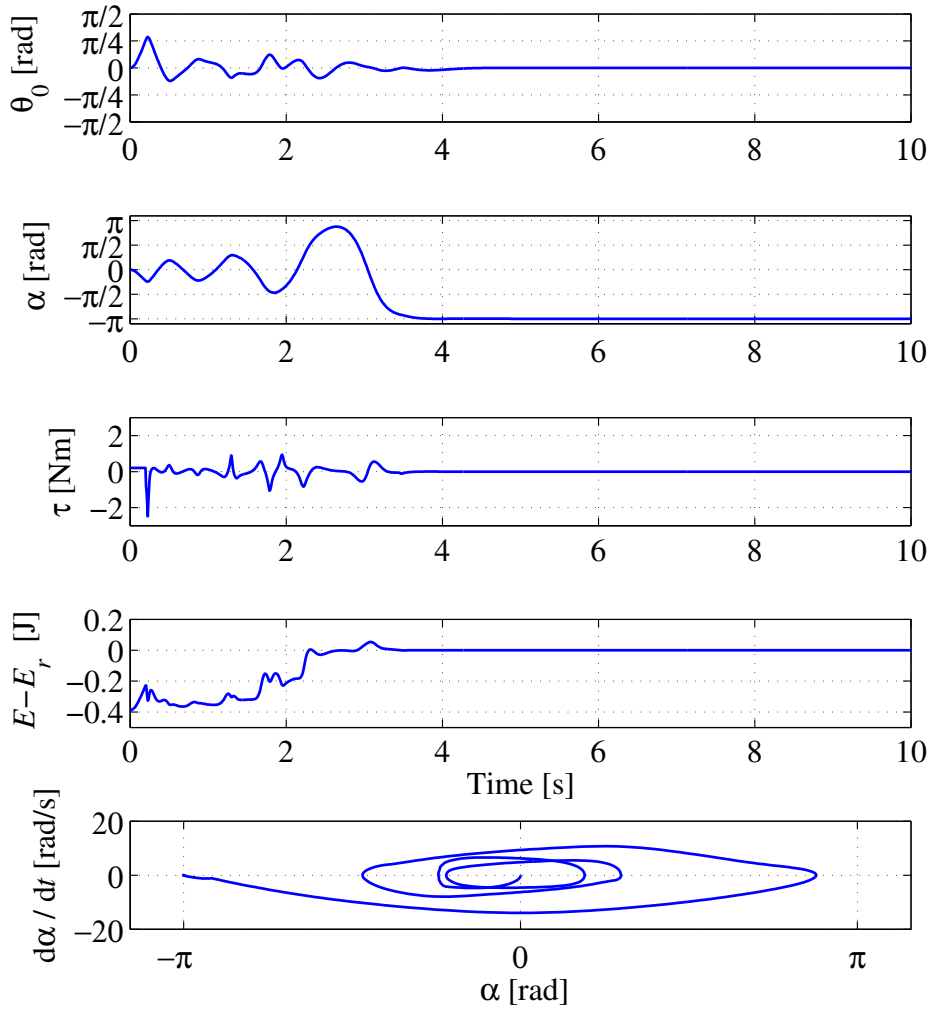


Fig. 4.10 Simulation results of time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $E - E_r$  and phase portrait of  $(\alpha, \dot{\alpha})$  under a perturbation, the swing-up controller (4.2) and the stabilizing controller (4.12).

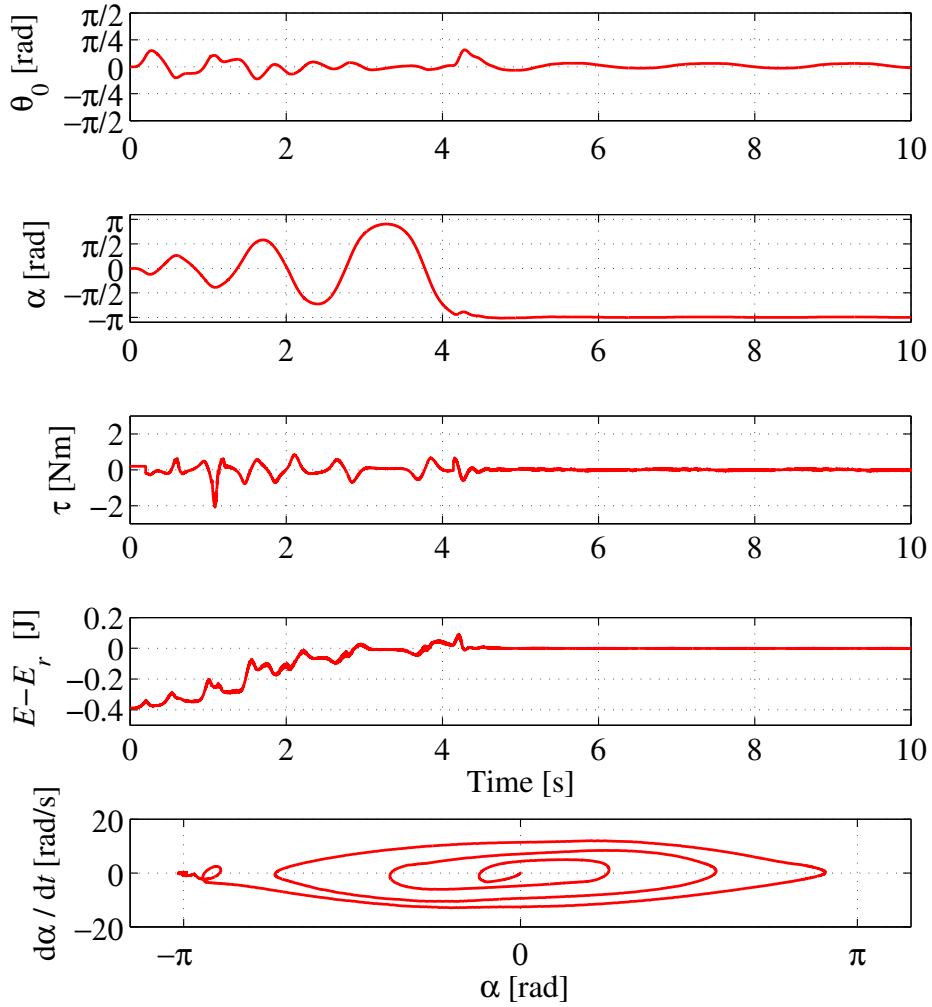


Fig. 4.11 Experimental results of time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $E - E_r$  and phase portrait of  $(\alpha, \dot{\alpha})$  under a perturbation, the swing-up controller (4.2) and the stabilizing controller (4.12).

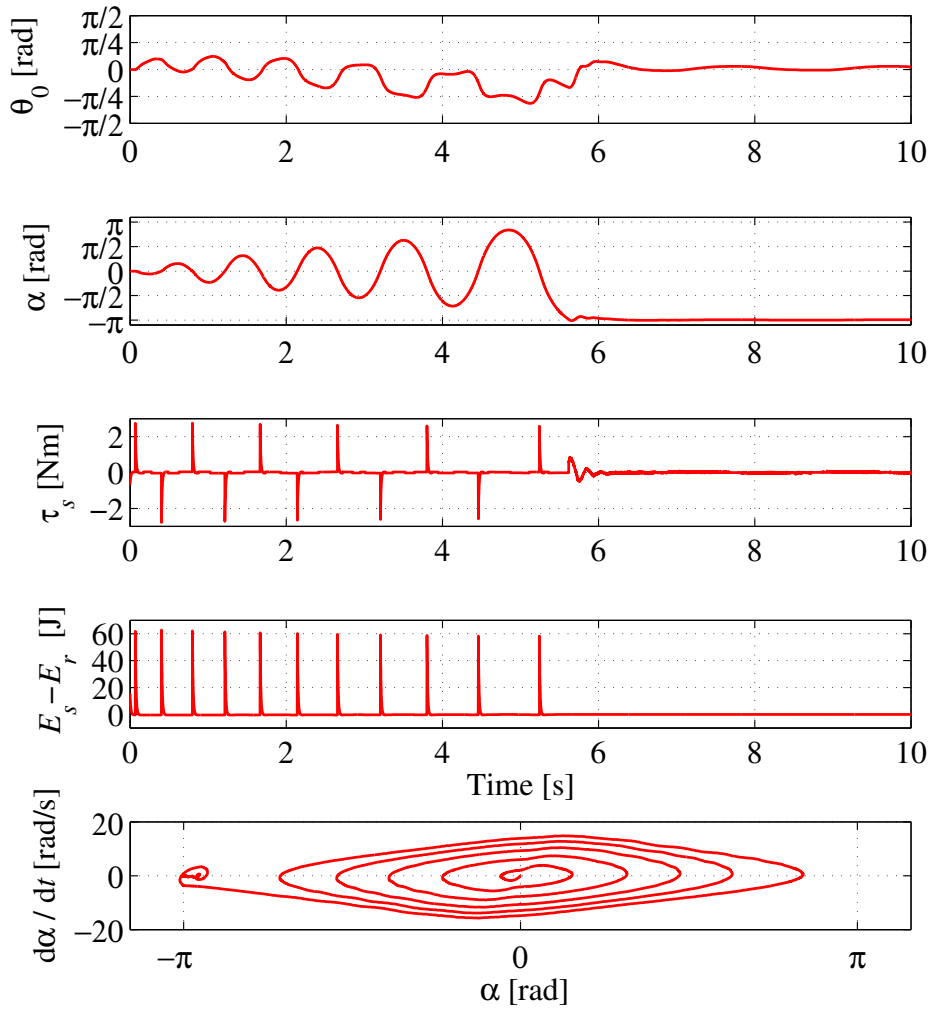


Fig. 4.12 Experimental results of time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha$ ,  $\tau_s$ ,  $E_s - E_r$  and phase portrait of  $(\alpha, \dot{\alpha})$  under the swing-up controller (4.19) and the stabilizing controller (4.12)

## 第5章 強安定化

### 5.1 緒言

本章では、回転型振子の真上平衡点における強安定化の問題を扱う。Acrobot や Pendubot と呼ばれる回転型振子とは異なる構造をもった、振子型劣駆動システムの強安定化制御に関する先行研究にヒントを得て、2.6 節で示したように、回転型振子の強安定化を達成するための適切な出力が存在するかどうかについて調査する。

真上平衡点における線形近似モデルの状態方程式を使用し、調整可能なパラメータにより、特定の出力を設計する。そのうえで、真上平衡点で回転型振子を局所安定化する強安定化制御器が常に存在すること、および強安定化制御器の設計手法を示す。また、数値シミュレーションによって、設計した強安定化制御器が有効であることを確認し、さらに、設計した強安定化制御器がシステムのある程度の不確かなパラメータに対してもロバストであることを示す。

### 5.2 強安定化制御器の存在性

ここでは、アームの角度  $\theta_0$  と振子の角度  $\alpha$  のみ測定可能であると仮定し、補題 1 を用いて真上平衡点でシステムを局所安定する強安定化制御器が存在するかどうかを調査する。この目的を達成するために、Fig. 2.3 の  $P(s)$  を設計する必要がある。すなわち、(2.37) 式の状態方程式に加えて出力の設計を必要とする。 $\theta_0$  と  $\alpha$  の角度のみ測定可能であるため、以下のように出力を設計する。

$$y = (1 - \lambda)\theta_0 - \lambda(\alpha - \pi) \quad (5.1)$$

ここで、 $\lambda$  は未確定のパラメータである。(2.38) 式とともに、システムを真上平衡点  $x = 0$  近傍で線形近似したシステムの状態空間表現は以下のように表される。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.2)$$

ここで

$$C = \begin{bmatrix} 1 - \lambda, & -\lambda, & 0, & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

である.

(5.2) 式の状態空間表現により, Fig. 2.3 の  $P(s)$  について次式を得る.

$$\begin{aligned} P(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{\psi s^2 - \delta}{s^2((a_0 a_1 - a_2^2)s^2 - a_0 b_0)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ただし,

$$\psi = -(a_1 + a_2)\lambda + a_1 \quad (5.5)$$

$$\delta = -b_0\lambda + b_0 \quad (5.6)$$

である.  $P(s)$  は  $s = 0$  の二つの実極と次式の  $s = \pm p$  の二つの実極をもつ.

$$p = \sqrt{\frac{a_0 b_0}{a_0 a_1 - a_2^2}} \quad (5.7)$$

$x = 0$  の安定化問題を考えるため, Fig. 2.3 の  $r$  を  $r = 0$  とする.  $P(s)$  に対して, 次式の安定化制御器が存在するための必要十分条件は,  $P(s)$  に極零相殺が存在しないことである.

$$u = -K(s)y \quad (5.8)$$

したがって,  $P(s)$  に極零相殺が存在しないための必要十分条件は

$$\lambda \neq 1, \text{ or } \lambda \neq d_1 \quad (5.9)$$

である. ここで,  $d_1$  は次式である.

$$d_1 = \frac{a_2}{a_0 + a_2} \quad (5.10)$$

実際に  $\lambda = 1$  の場合,  $s = 0$  で  $P(s)$  の 極零相殺が存在し,  $\lambda = d_1$  の場合,  $s = \pm p$  で  $P(s)$  の 極零相殺が存在する. (5.9) 式の物理的解釈は,  $(C, A)$  が可観測であるための必要十分条件は (5.9) 式が成立することである. 次式の可観測行列の直接的な計算により, (5.12) 式を得る.

$$\begin{aligned}
U_o &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & \frac{b_0((a_0+a_2)\lambda - a_2)}{-a_0a_1 + a_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_0((a_0+a_2)\lambda - a_2)}{-a_0a_1 + a_2^2} \end{bmatrix} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

$$|U_o| = -\frac{b_0^2(\lambda-1)^2((a_0+a_2)\lambda - a_2)^2}{(-a_0a_1 + a_2^2)^2} \quad (5.12)$$

したがって、 $(C, A)$  が可観測であるための必要十分条件は  $|U_o| \neq 0$  であり、(5.9) 式は成立する。

(5.4) 式のプラント  $P(s)$  が強安定化可能であるような  $\lambda$  が存在するかどうかを調査する。  $P(s)$  の零点により、 $\psi = 0$  のとき、 $P(s)$  は有限零点をもたず、四つの無限遠零点をもち、 $\psi \neq 0$  のとき、 $P(s)$  は二つの無限遠零点  $\pm z$  と二つの有限零点をもつ。

$$z = \sqrt{\frac{\delta}{\psi}} \quad (5.13)$$

したがって、 $P(s)$  の零点はパラメータ  $\lambda$  によって決まる。補題 1 を用いることにより、真上平衡点での回転型振子に対して強安定化制御器の存在性を証明することができる。本章の主要な結果を以下に示す。

**定理 3** (5.2) 式で与えられる真上平衡点での回転型振子の線形化したプラントは、(5.1) 式の  $\lambda$  が次式を満足すれば、強安定可能である。

$$d_1 < \lambda < 1 \quad (5.14)$$

ここで、 $d_1$  は (5.10) 式で定義される値である。

**証明 2** 補題 1 より、(5.4) 式の  $P(s)$  が強安定化可能であるための必要十分条件は、 $P(s)$  が非負の実軸上において、すべての実零点の組の間に偶数個の実極をもつことである。したがって、(5.4) 式の  $P(s)$  が強安定化であるための必要十分条件は、以下の三つの場合のいずれか一つが成立することである。

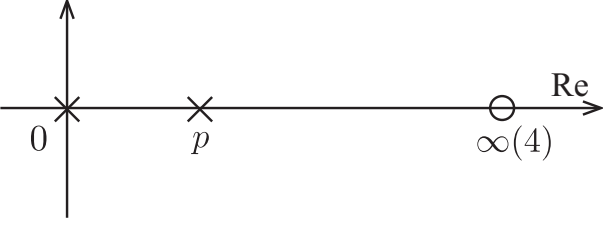
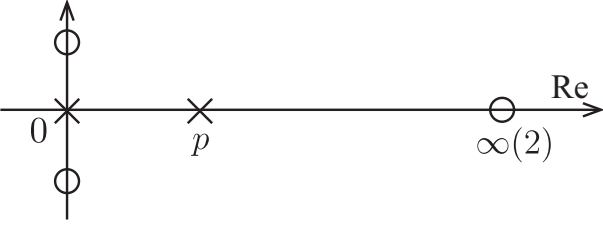
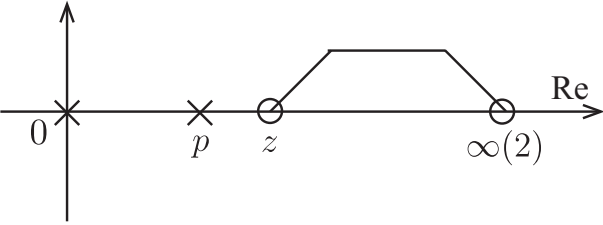
Case 1:  $\psi = 0$ , すなわち  $P(s)$  は有限零点をもたず, 四つの無限遠零点をもつ.

Case 2:  $\psi\delta < 0$ , すなわち  $P(s)$  が二つの虚数零点 (実零点ではない) と二つの無限遠零点をもつ.

Case 3:  $\psi\delta > 0$  かつ  $z > p$ , すなわち  $P(s)$  が  $z > p$  を満足する正の零点に対して, 二つの有限零点と二つの無限遠零点をもつ.

Case 1, 2, 3 を図示すると, Table. 5.1 のようになる.

Table 5.1 Possible condition for strong stability.

Case 1	$\psi = 0$	
Case 2	$\psi\delta < 0$	
Case 3	$\psi\delta > 0$	

(5.14) 式を証明するために, Case 1, 2, 3 について, それぞれ解析する.

はじめに、次の条件式を得る.

$$\psi = 0 \iff \lambda = d_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} < 1 \quad (5.15)$$

$$\delta = 0 \iff \lambda = 1 \quad (5.16)$$

Case 1 に関して, (5.15) 式を得る.

Case 2 に関して, (5.15), (5.16) 式を用いて,  $\psi\delta < 0$  から次式を得る.

$$d_2 < \lambda < 1 \quad (5.17)$$

Case 3 に関して, (5.15), (5.16) 式を用いて,  $\psi\delta > 0$  から次式を得る.

$$\psi > 0, \delta > 0 \iff \lambda < d_2 \quad (5.18)$$

$$\psi < 0, \delta < 0 \iff \lambda > 1 \quad (5.19)$$

(5.18) 式が成立する場合,  $z > p > 0$  を二乗すると次式を得る.

$$\frac{\delta}{\psi} > p^2 \quad (5.20)$$

$\psi > 0$  により, 次式を得る.

$$\delta > \psi p^2 \quad (5.21)$$

直接の計算により, 次式を導出する.

$$-b_0\lambda + b_0 > (-(a_1 + a_2)\lambda + a_1)p^2 \quad (5.22)$$

これは次式として表すことができる.

$$((a_1 + a_2)p^2 - b_0)\lambda > a_1p^2 - b_0 \quad (5.23)$$

上記不等式を簡略化するため, (5.7) 式の  $p$  を用いることにより, 次式を得る.

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)p^2 - b_0 &= \frac{(a_1 + a_2)a_0b_0}{a_0a_1 - a_2^2} - b_0 \\ &= \frac{(a_0 + a_2)a_2b_0}{a_0a_1 - a_2^2} > 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} a_1p^2 - b_0 &= \frac{a_1a_0b_0}{a_0a_1 - a_2^2} - b_0 \\ &= \frac{a_2^2b_0}{a_0a_1 - a_2^2} > 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$



したがって、次式を得る.

$$\begin{aligned}
 \lambda &> \frac{a_1 p^2 - b_0}{(a_1 + a_2)p^2 - b_0} \\
 &= \frac{a_2}{a_0 + a_2} \\
 &= d_1
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

また,

$$d_1 < d_2 \tag{5.27}$$

である. この関係式が成立することは, (5.27) 式を以下のように整理し, (2.41) 式の  $a_0 a_1 - a_2^2 > 0$  を用いることで, 確認できる.

$$\begin{aligned}
 d_2 - d_1 &= a_1(a_0 + a_2) - a_2(a_1 + a_2) \\
 &= a_1 a_2 + a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2^2 \\
 &= a_0 a_1 - a_2^2 > 0
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

したがって, (5.18) 式と (5.26) 式から,  $\psi > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $z > p > 0$  を満足する  $\lambda$  の範囲は以下であることが分かる.

$$d_1 < \lambda < d_2 \tag{5.29}$$

一方, (5.19) 式が成立する場合,  $z > p > 0$ , すなわち (5.20) 式は  $\psi < 0$  より次式を得る.

$$\delta < \psi p^2 \tag{5.30}$$

(5.26) 式の導出と同様であり, 次式を得る.

$$\lambda < d_1 \tag{5.31}$$

これは  $d_1 < 1$  より, (5.19) 式の不等式  $\lambda > 1$  と矛盾する. したがって,  $\psi < 0$ ,  $\delta < 0$ ,  $z > p > 0$  は同時に成立することができない. (5.15), (5.17), (5.29) 式を組み合わせることで, 上記結果を要約すると  $P(s)$  が強安定化可能であるための必要十分条件は,  $\lambda$  は (5.14) 式を満足することである. これで定理 3 の証明は完結する. ■

### 5.3 強安定化制御器の設計法

強安定化制御器の設計に関して、 $P(s)$  を得るために (5.14) 式を満足する  $\lambda$  を選択する．次に  $P(s)$  に対して強安定化制御器を設計するために、例えば文献 [16], [17] のような既存の手法を用いることができる．

ただし、文献 [24] でも言及しているように、文献 [16], [17] で用いられる基本手順はかなり複雑である．したがって、 $P(s)$  の不安定な極と零点はすべて実数で異なるという仮定の下で、設計手順は文献 [24] (p. 78) で以下のように与えられる．

#### 設計手順 (文献 [24])

##### Step 0

既約な  $N, M$  を用いて  $P = N/M$  と書く． $N$  の非負な実数の零点を次のように並べる．

$$0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m = \infty \quad (5.32)$$

$r_i = 1/M(\sigma_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  と定義する．このとき、 $P$  が強安定化可能である必要十分条件は、 $r_1, \dots, r_m$  すべてが同符号であることである．もしこの条件が成り立つならば、つぎに進む．

##### Step 1

$$U_1(s) = r_1 \quad (5.33)$$

とする． $U_k$  は

$$U_k, U_k^{-1} \in S, \quad U_k(\sigma_i) = r_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (5.34)$$

を満足するように構成されていると仮定し、以下の Step  $k+1$  を繰り返す．ここで、 $S$  はすべて安定かつプロパーな実有理関数の集合である．

##### Step $k+1$

$S$  に属する  $F$  を  $s = \sigma_1, \dots, \sigma_k$  で零点を持つように選ぶ． $l \geq 1$  と  $a$  を

$$[1 + aF(\sigma_{i+1})]^l U_k(\sigma_{k+1}) = r_{k+1} \quad (5.35)$$

$$|a| < \frac{1}{\|F\|_\infty} \quad (5.36)$$

を満たすように選び

$$U_{k+1} = (1 + aF)^l U_k \quad (5.37)$$

とする. 以上を Step  $m$  まで続ける.

Step  $m + 1$

$U = U_m$ , かつ

$$C = \frac{1 - MU}{NU} \quad (5.38)$$

とする.

以上が文献 [24] で示された設計手順であるが, (5.4) 式の  $P(s)$  が 原点  $s = 0$  で二つの極をもつこと, および  $P(s)$  が少なくとも二つの無限遠零点をもつため, 文献 [24] の設計手順を直接適用することはできない. また, 文献 [23] で示されている安定化制御器の設計手法について, Acrobot と Pendubot の伝達関数は, 二つの正と負の極をもつことから, そこで示された設計手法が, 回転型振子に直接適用できないことを指摘しておく.

回転型振子について, (5.2) 式の  $(A, B)$  と  $(C, A)$  は, それぞれ可制御かつ可観測であるため, Fig. 5.1 に示すようなオブザーバを構成すると,  $A + BF$  と  $A + LC$  が安定であるような  $F$  と  $L$  を見つけることができる.

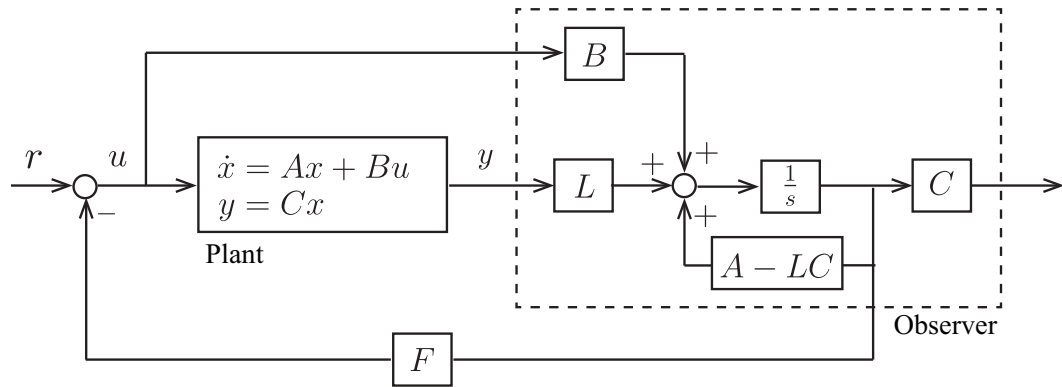


Fig. 5.1 Structure of observer.

文献 [24] より,

$$K(s) = F(sI - (A + BF + LC))^{-1} L \quad (5.39)$$

は  $P(s)$  の安定化制御器であり,  $A + BF + LC$  が安定の場合,  $K(s)$  は安定である. 本章では, [16] で提案されたかなり複雑な手法を用いず,  $A + BF + LC$  が安定であるように, パラメータ  $\lambda$ ,  $F$ ,  $L$  を調整する.

## 5.4 数値シミュレーション

理論結果の有効性は非線形モデル (2.24) 式を用いた回転型振子 [14] に対して数値シミュレーションにより検証する. システムの機械パラメータは Table 5.2 に示す. 重力加速度は  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  とする. (5.14) 式より (5.4) 式の  $P(s)$  が強安定可

Table 5.2 System parameters

Symbol or Name	Value	Units
$L_0$	0.2159	m
$l_1$	0.1556	m
$m_1$	0.1270	kg
$I_0$	$2.000 \times 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$J_1$	$1.200 \times 10^{-2}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

能であるための必要十分条件は, パラメータ  $\lambda$  が次式を満足することである.

$$0.3501 < \lambda < 1 \quad (5.40)$$

$\lambda$  の二つの異なる値を取り, 制御性能への影響を検証する.

### シミュレーション 1 ( $\lambda = 0.5$ )

まず,  $\lambda = 0.5$  を取ると次式を得る.

$$P(s) = \frac{0.2683(s - 151.9)(s + 151.9)}{s^2(s - 9.904)(s + 9.904)} \quad (5.41)$$

Fig. 5.2 から確認できるように, 正の零点 151.9186 と  $\infty$  の間に正の実数極がないため, 補題 1 より, (5.41) 式の  $P(s)$  は強安定可能である.

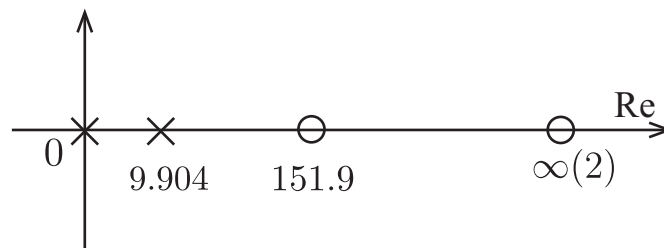


Fig. 5.2  $P(s)$  has two real finite zeros and two infinite zeros.

数値シミュレーションにおいて、(5.39) 式を用いて制御器を設計するために MATLAB 関数 'lqr' を用いて  $4 \times 4$  の単位行列である  $Q$  と  $R = 1$  より、 $F$  と  $L$  を計算する.

$$F = [1, -17.76, 1.329, -2.790] \quad (5.42)$$

$$L = [54.84, 96.88, 518.0, 959.4]^T \quad (5.43)$$

(5.41) 式に対して、次式の  $K(s)$  を得る.

$$K(s) = \frac{-3654(s + 9.904)(s^2 + 0.01100s + 0.003000)}{(s + 386.0)(s + 21.52)(s^2 + 10.96s + 270.5)} \quad (5.44)$$

このとき、閉ループシステムの極は以下である.

$$\left\{ \begin{array}{l} -386.0 \\ -10.02 \\ -9.790 \\ -5.230 \pm 2.160j \\ -0.6000 \pm 0.4500j \\ -1.000 \end{array} \right.$$

これは、 $K(s)$  が強安定化制御器であることを示している. Fig. 5.3 に非線形モデル (2.24) 式で記述された回転型振子に対する安定化制御器 (5.44) 式のシミュレーション結果を示す. 初期状態は以下のとおりである.

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.10 \\ \pi + 0.10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Fig. 5.3 より、システムは真上平衡点で安定化していることが分かる.

## シミュレーション 2 ( $\lambda = 0.7$ )

次に  $\lambda = 0.7$  を取ると次式を得る.

$$P(s) = \frac{-108.9(s - 5.842j)(s + 5.842j)}{s^2(s - 9.904)(s + 9.904)} \quad (5.46)$$

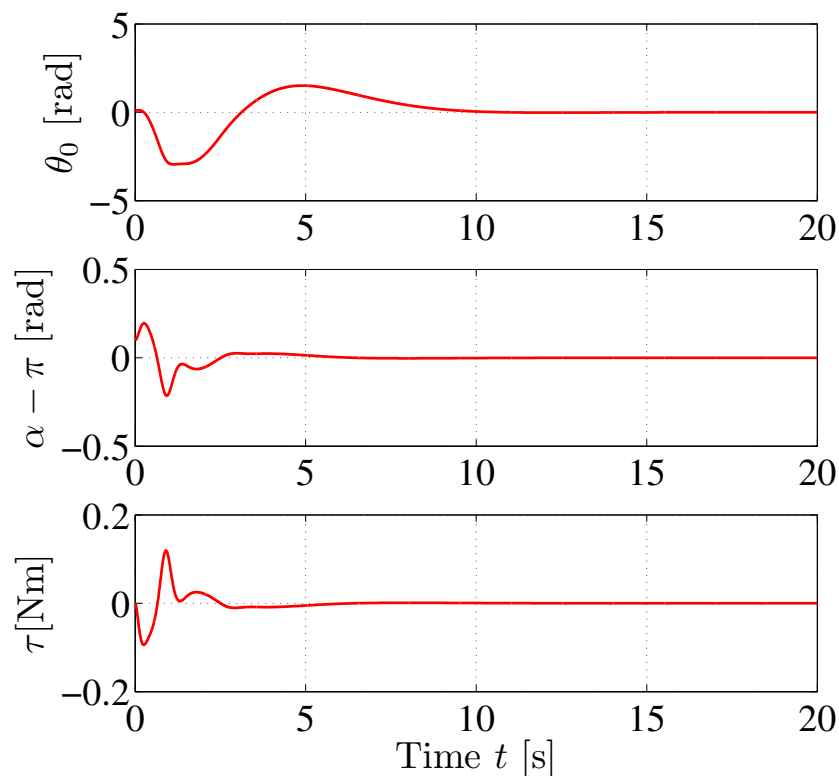


Fig. 5.3 Time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha - \pi$ , and  $\tau$  under stable stabilizing controller (5.44) and initial state (5.45).

Fig. 5.4 から確認できるように,  $P(s)$  は二つの虚零点と二つの無限遠零点をもつため, 補題 1 により,  $P(s)$  は強安定可能である.

(5.46) 式の  $P(s)$  に対する安定な安定化制御器の設計により, (5.42) 式と同じ  $F$  と以下の  $L$  を得る.

$$L = [24.90, 40.27, 215.9, 398.7]^T \quad (5.47)$$

これより, 次式の  $K(s)$  を得る.

$$K(s) = \frac{-1516(s + 9.904)(s^2 + 0.03000s + 0.007000)}{(s + 384.8)(s + 32.30)(s^2 + 1.070s + 43.32)} \quad (5.48)$$



Fig. 5.4  $P(s)$  has two imaginary zeros and two infinite zeros.

このとき，閉ループシステムの極は以下である．

$$\left\{ \begin{array}{l} -386.0 \\ -10.02 \\ -9.790 \\ -5.230 \pm 2.160j \\ -0.4500 \pm 0.3800j \\ -1.000 \end{array} \right.$$

これは  $K(s)$  が強安定化制御器であることを示している．初期状態は，(5.45) 式の  $x(0)$  より大きい値に設定し，シミュレーションを行う．

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.25 \\ \pi + 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Fig. 5.5 に非線形モデル (2.24) 式で記述された回転型振子に対する安定化制御器のシミュレーション結果を示す．Fig. 5.5 より，システムは真上平衡点で安定化していることが分かる．(5.46) 式の  $P(s)$  の分子は (5.41) 式の  $P(s)$  と完全に異なる．そのうえ，(5.46) 式の  $P(s)$  に対する (5.48) 式の  $K(s)$  の零点，極，ゲインと (5.41) 式の  $P(s)$  に対する (5.44) 式の  $K(s)$  は一つの共通な零点を除いて異なる．シミュレーション結果は パラメータ  $\lambda$  を適切に選択することが，より良い制御性能を実現する安定な安定化制御器を見つけるためのもう一つの可能性を与えることを示している．

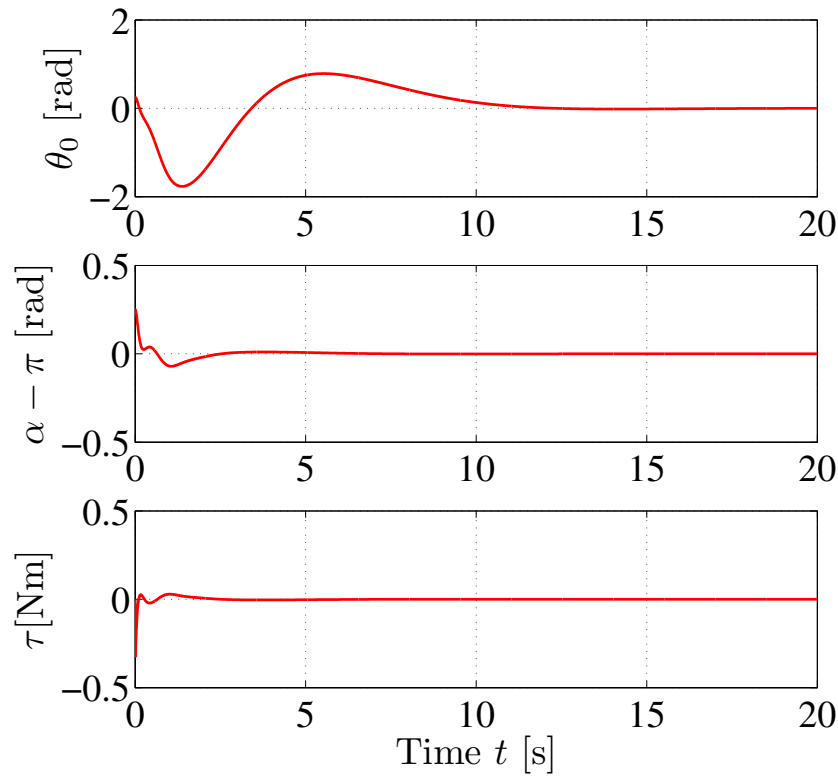


Fig. 5.5 Time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha - \pi$  and  $\tau$  under stable stabilizing controller (5.48) and initial state (5.49).

## 5.5 強安定化制御器のロバスト性について

ロバスト (robust) とは、「制御対象のモデル化誤差があってもある性質が成り立つ」ことを意味し、このような性質を一般にロバスト性 (robustness) という。

回転型振子がパラメータの不確実性、モデル化されない動特性をもつならば、設計された強安定化制御器は安定化を理論的に保証できない。そのため、設計した強安定化制御器がロバスト性をもち、パラメータの不確かさをもつシステムに対しても振子を真上平衡点で安定化することができるかどうかを検証する。

以下では二つの数値シミュレーションを実行する。便宜上、パラメータ  $a$  の実際の値を示すために  $a^{\text{re}}$ 、推定した値を示すために  $a^{\text{es}}$  を用いる。(2.22) 式の五つの



パラメータに関して、次式を満足する場合を考える.

$$\begin{cases} a_0^{\text{es}} = \rho^3 I_0 + \rho m_1 (\rho L_0)^2 \\ a_1^{\text{es}} = \rho^3 J_1 + \rho m_1 (\rho l_1)^2 \\ a_2^{\text{es}} = \rho m_1 l_1 L_0 \\ a_3^{\text{es}} = \rho m_1 (\rho l_1)^2 \\ b_0^{\text{es}} = \rho m_1 l_1 g \end{cases} \quad (5.50)$$

ここで  $\rho$  は定数である.  $\rho = 1$  の場合, 不確かなパラメータはないことを意味する.  $\rho = 1.05$  と  $\rho = 1.10$  の場合に対して, 5.4 章と同じ初期条件を用いてシミュレーションを行う.

実際に, 制御入力  $\tau$  は, パラメータの推定値を用いて計算し, パラメータの実際の値をもつ非線形モデル (2.24) 式で記述される回転型振子に適用した.

### シミュレーション 1 ( $\lambda = 0.7, \rho = 1.05$ )

まず,  $\lambda = 0.7$  と  $\rho = 1.05$  を取ると次式を得る.

$$P(s) = \frac{-94.04(s - 5.701)(s + 5.701)}{s^2(s - 9.665)(s + 9.665)} \quad (5.51)$$

このとき, 実際の機械パラメータ  $a_0^{\text{re}}, a_1^{\text{re}}, a_2^{\text{re}}, a_3^{\text{re}}, b_0^{\text{re}}$  の値は

$$\begin{cases} a_0^{\text{re}} = 7.900 \times 10^{-3} \\ a_1^{\text{re}} = 4.300 \times 10^{-3} \\ a_2^{\text{re}} = 4.300 \times 10^{-3} \\ a_3^{\text{re}} = 3.100 \times 10^{-3} \\ b_0^{\text{re}} = 1.939 \times 10^{-1} \end{cases} \quad (5.52)$$

であるのに対し, 推定値  $a_0^{\text{es}}, a_1^{\text{es}}, a_2^{\text{es}}, a_3^{\text{es}}, b_0^{\text{es}}$  は以下のとおりである.

$$\begin{cases} a_0^{\text{es}} = 9.200 \times 10^{-3} \\ a_1^{\text{es}} = 4.900 \times 10^{-3} \\ a_2^{\text{es}} = 4.900 \times 10^{-3} \\ a_3^{\text{es}} = 3.600 \times 10^{-3} \\ b_0^{\text{es}} = 2.137 \times 10^{-1} \end{cases} \quad (5.53)$$

$P(s)$  は二つの虚数零点と二つの無限遠零点をもつため、補題 1 より、 $P(s)$  は強安定化可能である。

(5.51) 式の  $P(s)$  に対する (5.39) 式の安定な安定化制御器の設計について、

$$F = [1, -17.46, 1.337, -2.804] \quad (5.54)$$

$$L = [24.43, 39.39, 206.1, 380.5]^T \quad (5.55)$$

の  $F$ ,  $L$  を用いて、次式の  $K(s)$  を得る。

$$K(s) = \frac{-1455(s + 9.665)(s^2 + 0.03100s + 0.008000)}{(s + 332.2)(s + 31.80)(s^2 + 1.030s + 41.25)} \quad (5.56)$$

閉ループシステムの極は以下である。

$$\left\{ \begin{array}{l} -333.5 \\ -9.940 \\ -9.410 \\ -5.110 \pm 2.110j \\ -0.450 \pm 0.380j \\ -1.000 \end{array} \right.$$

これは  $K(s)$  が強安定化制御器であることを示している。Fig. 5.6 に初期状態 (5.49) 式をもつ非線形モデル (2.24) 式で記述された回転型振子に対する安定化制御器のシミュレーション結果を示す。Fig. 5.6 について、Fig. 5.5 で示されたシミュレーション結果と比較すると、真上平衡点でシステムを安定化するまでに時間を要しているが、安定化は成功していることがわかる。

## シミュレーション 2 ( $\lambda = 0.7, \rho = 1.10$ )

次に、 $\lambda = 0.7$  と  $\rho = 1.10$  を取ると次式を得る。

$$P(s) = \frac{-81.79(s - 5.570)(s + 5.570)}{s^2(s - 9.443)(s + 9.443)} \quad (5.57)$$

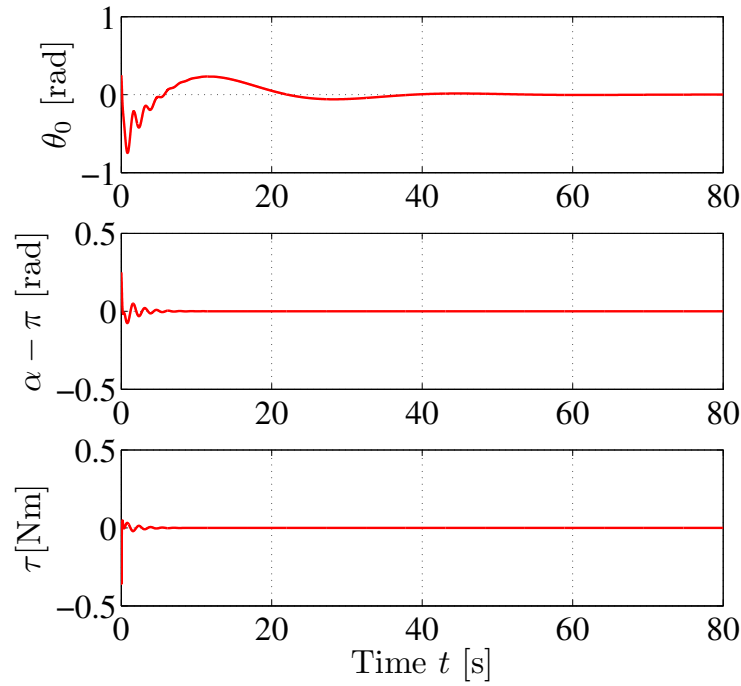


Fig. 5.6 Time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha - \pi$  and  $\tau$  under stable stabilizing controller (5.56) and initial state (5.49).

(5.57) 式の  $P(s)$  に対する (5.39) 式の安定な安定化制御器の設計について、このとき、推定値  $a_0^{\text{es}}$ ,  $a_1^{\text{es}}$ ,  $a_2^{\text{es}}$ ,  $a_3^{\text{es}}$ ,  $b_0^{\text{es}}$  は以下のとおりである。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{\text{es}} = 1.050 \times 10^{-2} \\ a_1^{\text{es}} = 5.700 \times 10^{-3} \\ a_2^{\text{es}} = 5.700 \times 10^{-3} \\ a_3^{\text{es}} = 4.100 \times 10^{-3} \\ b_0^{\text{es}} = 2.346 \times 10^{-1} \end{array} \right. \quad (5.58)$$

$$F = [1, -17.19, 1.346, -2.819] \quad (5.59)$$

$$L = [24.00, 38.56, 197.2, 364.0]^T \quad (5.60)$$

より、次式の  $K(s)$  を得る。

$$K(s) = \frac{-1400(s + 9.443)(s^2 + 0.03100s + 0.008000)}{(s + 288.6)(s + 31.30)(s^2 + 0.9900s + 39.36)} \quad (5.61)$$

閉ループシステムの極は以下である．

$$\left\{ \begin{array}{l} -290.1 \\ -9.720 \\ -9.180 \\ -4.990 \pm 2.060j \\ -0.450 \pm 0.380 \\ -1.000 \end{array} \right.$$

これは  $K(s)$  が強安定化制御器であることを示している．

Fig. 5.7 に初期状態 (5.49) 式の非線形モデル (2.24) 式で記述された回転型振子に対する安定化制御器のシミュレーション結果を示す．Fig. 5.7 について，初期の時間帯において，アームの振動が Fig. 5.5, 5.6 で示した振動より大きくなっているが，安定化制御器は真上平衡点でシステムを安定化することに成功している．

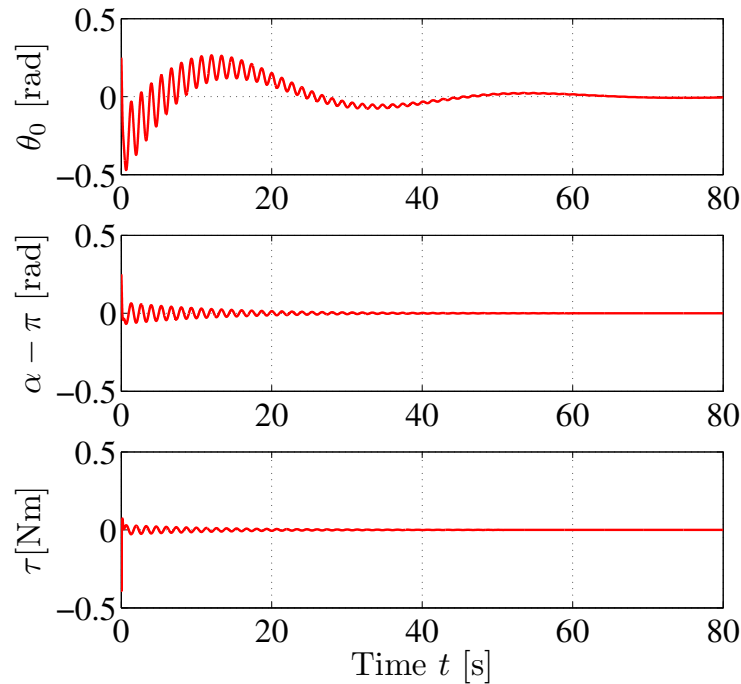


Fig. 5.7 Time responses of  $\theta_0$ ,  $\alpha - \pi$  and  $\tau$  under stable stabilizing controller (5.61) and initial state (5.49).

シミュレーション結果は，本章で設計された強安定化制御器が，不確かなパラメータに対して，ある程度のロバスト性をもつことを示した．

## 5.6 結言

本章では，回転型振子の真上平衡点に対して，強安定化制御器が常に存在する設計法を示し，強安定化を達成するための調整可能なパラメータの範囲を示した．また，数値シミュレーションによって，設計した強安定化制御器が有効であることを確認し，さらに，設計した強安定化制御器がシステムのある程度の不確かなパラメータに対してもロバストであることを示した．

## 第6章 結論

### 6.1 研究成果

本論文では回転型振子の振り上げ・安定化制御の理論，および実機検証を行い，また，その強安定化制御について制御器の設計と検証を行った．

3章において，回転型振子に対するエネルギー制御法による振り上げ制御問題を扱った．Fantoni ら [6] のエネルギー制御法に対する制御則の解法とは異なり，まず，制御則における特異点を回避するための必要十分条件を示した．次に，振子の大域的な動きを解析し，先行研究で要求された回転型振子の初期条件と真下平衡点がサドル型平衡点であることを明らかにすることにより，制御パラメータについて制約を取り除くことに成功した．

特に，ラウス・フルビッツの安定判別法を用いることにより，真下平衡点で評価されたヤコビ行列は開左半平面，及び右半平面にそれぞれ二つの固有値をもつことを示した．ルベーク測度ゼロの集合を除くすべての初期状態に対して任意の安定化制御器に切り替え可能な範囲まで振り上げることができることを証明した．このような制御目的を達成するため，より大きな制御パラメータの範囲を与えた．

最後に数値シミュレーションにより理論結果の有効性を示した．シミュレーション結果は改善された制御パラメータの下で振り上げ制御が素早く達成できることを示した．

4章では提案した振り上げ制御則の有効性を検証するため，回転型振子に対する実験結果を示した．また，実験システムの開発元である Quanser Consulting Inc.[14] より提供されている制御則との比較を行った．振り上げ制御において，実験システム [14] の制御則は，振子の回転運動エネルギーのみを制御しているため，理論的および実験的に，本論文で提案した制御則の方が優れていることを示した．

5章は，回転型振子の真上平衡点に対する強安定化の未解決の問題を主題とした．アームと振子の角度のみ測定可能のとき，回転型振子の真上平衡点に対して強安定化制御器の存在性と設計を示した．これらの結果を得るために，調整可能なパラメータを含む出力を設計し，また，真上平衡点での回転型振子の線形化モデルの極零点を用いた．線形化モデルが強安定可能である調整可能なパラメータの範囲を示した．シミュレーション結果は得られた理論結果の有効性を示した．そ

のうえ、回転型振子の不確かなパラメータに対して提案した制御器のロバスト性を数値的に示した。Acrobot や Pendubot の文献に対する結果と比較し、回転型振子に対する強安定化制御器を設計するにあたっての違いと難しさも示した。

## 6.2 研究課題

回転型振子の振り上げ制御において、その実験結果は、制御目標は達成されていることを示したが、数値シミュレーションで得られた時間応答と異なる結果となった。今後の展開として、理論検証結果と実験結果の差異を小さくするためには、摩擦などの動特性を考慮した、より実機に近いモデルを用いた制御器設計、および理論検証を行う必要がある。

また、強安定化制御において、理論検証、数値シミュレーションにより、設計した制御器の有効性を示したが、実機検証には至っていない。現状の出力設計では、強安定可能なパラメータの選択範囲が狭いため、次のステップとして、強安定可能な範囲をさらに広げられるような出力設計を行うとともに、実機への適用を考慮した制御器設計を進める必要がある。

以上のことを考慮した制御器設計、理論解析、実機検証の実施を今後の課題とする。

## 参考文献

- [1] 荒井裕彦. Underactuated Manipulator の非ホロノミック制御. システム/制御/情報, Vol. 43, No. 10, pp. 553–560, 1999.
- [2] K. J. Åström and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, Vol. 36, No. 2, pp. 287–295, 2000.
- [3] I. Fantoni, R. Lozano, and M. W. Spong. Energy based control of the pendubot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 4, pp. 725–729, 2000.
- [4] X. Xin and M. Kaneda. Analysis of the energy based swing-up control of the acrobot. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 17, No. 16, pp. 1503–1524, 2007.
- [5] M. Izutsu, Y. Pan, and K. Furuta. Swing-up furuta pendulum by nonlinear sliding mode control. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 1, No. 1, pp. 12–17, 2008.
- [6] I. Fantoni and R. Lozano. Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit. *International Journal of Control*, Vol. 75, No. 6, pp. 390–398, 2002.
- [7] I. Fantoni and R. Lozano. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer, 2001.
- [8] M. W. Spong. The swing up control problem for the acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 15, No. 1, pp. 49–55, 1995.
- [9] J. Hauser and R. M. Murray. Nonlinear controllers for non-integrable systems: The acrobot example. In *Proceedings of the 1990 American Control Conference*, pp. 669–670, 1990.



- [10] S. A. Bortoff. Advanced nonlinear robotic control using digital signal processing. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 41, pp. 32 – 39, 1994.
- [11] M. W. Spong. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. In *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, pp. 431–435, 1996.
- [12] O. Kolesnichenko and A. S. Shiriaev. Partial stabilization of underactuated Euler-Lagrange systems via a class of feedback transformations. *Systems & Control Letters*, Vol. 45, No. 2, pp. 121–132, 2002.
- [13] R. Ortega, M. W. Spong, F. Gomez-Estern, and G. Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 8, pp. 1218–1233, 2002.
- [14] Quanser Inc. Rotary control challenge: Rotary pendulum experiment, product information sheet R7-1-rev. D. *Product Information Sheet*, 2008.
- [15] S. Tanaka, X. Xin, and T. Yamasaki. New results of energy-based swing-up control for a rotational pendulum. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 4, No. 6, pp. 394–400, 2011.
- [16] D. C. Youla, J. J. Bongiorno, and C. N. Lu. Single-loop feedback-stabilization of linear multivariable dynamical plants. *Automatica*, Vol. 10, No. 2, pp. 159–173, 1974.
- [17] M. Vidyasagar. *Control Systems Synthesis: A Factorization Approach*. MIT press, Cambridge, 1985.
- [18] A. W. A. Saif, D. W. Gu, and I. Postlethwaite. Strong stabilization of MIMO systems via unimodular interpolation in  $H_\infty$ . *International Journal of Control*, Vol. 69, No. 6, pp. 797–818, 1998.
- [19] H. Özbay and A. Gündes. Strongly stabilizing controller synthesis for a class of MIMO plants. In *Proc. of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pp. 359–363, 2008.
- [20] I. R. Petersen. Robust  $H_\infty$  control of an uncertain system via a strict bounded real output feedback controller. *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 30, No. 3, pp. 247–266, 2009.

- [21] A. Gundes and H. Özbay. Strong stabilization of a class of MIMO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 56, No. 6, pp. 1445–1452, 2011.
- [22] M. Wakaiki, Y. Yamamoto, and H. Özbay. Tangential nevanlinna-pick interpolation for strong stabilization of mimo distributed parameter systems. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1584–1590. IEEE, 2012.
- [23] X. Xin, K. Juuri, Y. Liu, and C. Sun. Existence and design of reduced-order stable controllers for two-link underactuated planar robots. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4971–4976, 2012.
- [24] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan, New York, 1992.
- [25] 小郷寛, 美多勉. システム制御理論入門. 昭晃堂, 1979.
- [26] 美多勉. 非線形制御入門-劣駆動ロボットの技能制御論-. 昭晃堂, 2000.
- [27] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, third edition, 2002.
- [28] 忻, 兼田. エネルギー制御法による劣駆動ロボットの振り上げ制御とその動きの解析: Acrobot の場合. 計測自動制御学会論文誌, Vol. 42, No. 4, pp. 411–420, 2006.
- [29] B. C. Kuo. *Automatic Control Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 6th edition, 1991.
- [30] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Springer, New York, 1999.

# 謝辞

本研究は、著者が社会人学生として、岡山県立大学大学院 情報系工学研究科 博士後期課程在学中に、岡山県立大学情報工学部 忻欣教授の指導もとに行ったものです。

主指導教員である忻欣教授には、著者の社会人学生という立場を最大限ご考慮いただき、深夜、休日を問わず、貴重な時間を費やしてご指導くださいました。仕事と学業を両立することの難しさはありましたが、それを乗り越えるために十分な多くの励ましとともに、辛抱強くご指導いただき、国際学術論文誌への投稿、国際会議への参加を経て、このように学位論文をまとめるに至りました。心より御礼申し上げます。

副指導教員である岡山県立大学情報工学部 山崎大河准教授には、実機検証や論文執筆を進めるうえで、休日返上でご指導いただきました。また研究の合間にも、積極的にお声掛けいただくなど、日頃からご配意を賜りました。心より御礼申し上げます。

そして、岡山県立大学情報工学部 渡邊富夫教授、穂苅真樹准教授には、本論文を査読いただくとともに、よりよい学位論文になる様、貴重なご意見、ご指摘をいただきました。心より御礼申し上げます。

また、本研究を進めるにあたり、多くのご協力、ご助言などをいただきました制御・ロボット工学研究室の学生の皆様、学生生活を支えていただきました岡山県立大学の皆様に心より感謝いたします。

最後に、自己研鑽の場として、在職のまま、大学で研究活動することにご理解いただきました、著者の勤務先であるタカヤ株式会社 開発事業部の事業部長をはじめ、関係者の皆様に御礼申し上げます。

# 研究業績

## 国際学術論文

1. S.Tanaka, X.Xin, and T.Yamasaki, New Results of Energy-Based Swing-Up Control for Rotational Pendulum, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol.4, No.6, pp. 394–400, 2011
2. X.Xin, S.Tanaka, J.H.She, and T.Yamasaki, New analytical results of energy-based swing-up control for the Pendubot, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.52, No.6, pp. 110-118, 2013

## 国際会議論文

1. S.Tanaka, X.Xin, and T.Yamasaki, New Results of Energy-Based Swing-Up Control for Rotational Pendulum, *Proceedings of 18th IFAC World Congress*, pp. 10673–10678, 2011
2. S.Tanaka, X.Xin, and T.Yamasaki, Experimental Verification of Energy-Based Swing-up Control for a Rotational Pendulum, *Proceedings of SICE Annual Conference 2012*, pp. 534–539, 2012
3. S.Tanaka, X.Xin, and T.Yamasaki, Studies on Stable Stabilizing Controllers for a Rotational Pendulum, *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications (CA 2013)*, pp. 85–91, 2013
4. X.Xin, S.Tanaka, J.H.She, and T.Yamasaki, Revisiting Energy-Based Swing-up Control for the Pendubot, *Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 1576–1581, 2010
5. X.Xin, S.Tanaka, J.H.She, and T.Yamasaki, Stabilizing control of TCP/AQM networks with time delay in state variables, *Proceedings of ICROS-SICE International Joint Conference 2009*, pp. 2843-2847, 2009

## 国内学会講演論文

1. 忻 欣, 重里 昂佑, 山崎 大河, 田中 征治, 2 自由度劣駆動ロボットの強安定化器の存在性と設計法, 第 55 回 自動制御連合講演会, pp. 1574-1576, 2012